ГЕОМЕТРІЯ ЧИСЕЛЪ

Составилъ П. В. П.

ЧАСТЬ I.

(съ приложеніемъ таблицы квадратовъ четырезначныхъ чиселъ)

МОСКВА. 18[illegible]

[illegible]

Предлагаемое сочиненіе имѣетъ цѣлью сдѣлать два изъ важнѣйшихъ вопросовъ теоріи чиселъ доступными для элементарнаго преподаванія. Всѣмъ извѣстно, какъ важно при вычисленіяхъ умѣнье разлагать числа на первоначальныхъ множителей. Безъ этого пріема при сложеніи или умноженіи дробей или въ другихъ подобныхъ случаяхъ результатъ часто совсѣмъ не могъ бы быть полученъ по трудности вычисленія, или не могъ бы быть прилагаемъ по неудобству формы.

Къ сожалѣнію этими выгодами сокращенія пользуются лишь въ весьма ограниченномъ размѣрѣ. Въ задачникахъ числа бываютъ подобраны такъ, чтобы они дѣлились на однозначныхъ дѣлителей, а когда впослѣдствіи встрѣчаются числа не подобранныя искусственно и слѣд. имѣющія иныхъ дѣлителей, то всѣ изученные способы остаются въ сторонѣ за незнаніемъ того, какъ разложить число на множители. Умноженіе нѣсколькихъ дробей съ многозначными членами безъ сокращенія ихъ требуетъ огромнаго труда, между тѣмъ, какъ сокращеніе даже одного изъ числителей съ однимъ изъ знаменателей значительно облегчаетъ дѣло.

Мы указываемъ возможность пополнить этотъ и многіе другіе пробѣлы въ Ариѳметикѣ и Алгебрѣ. Число четырезначное разлагается на множители простымъ пріискиваніемъ въ таблицѣ. Затѣмъ для какого угодно числа до ста милліоновъ мы указываемъ способъ найти его двузначныхъ дѣлителей, если они есть.

Что касается до дѣлителей, превышающихъ сто, то мы даемъ очень простой способъ находить ихъ при помощи таблицы квадратовъ. Этотъ способъ очень быстро даетъ результатъ для пятизначныхъ чиселъ и при нѣкоторомъ видоизмѣненіи и для шестизначныхъ чиселъ.

Во второй части нашего труда мы займемся между прочимъ другимъ вопросомъ—о квадратичныхъ формахъ. Умѣнье представить число въ какой нибудь требуемой формѣ, позволяетъ рѣшать множество вопросовъ чистой и прикладной математики, какъ въ низшихъ, такъ и въ высшихъ ея отрасляхъ. Рѣшеніе вопроса будетъ основано на тѣхъ же таблицахъ, которыя приложены къ І-ой части.

Но не только ту практическую выгоду доставляютъ предлагаемые способы изслѣдованія чиселъ, что они облегчаютъ вычисленія. Еще важнѣе другая сторона дѣла. Множество законовъ выражается строго опредѣленными числовыми соотношеніями. Эти соотношенія, трудно замѣчаемыя между несоизмѣримыми числами, сами собою бросаются въ глаза между числами соизмѣримыми. Мы думаемъ, что при новыхъ изслѣдованіяхъ полученіе точныхъ результатовъ вмѣсто приближенныхъ всегда, гдѣ это возможно, значительно расширило бы область науки.

П. П.

10 Апрѣля 1885 г.

ГЕОМЕТРІЯ ЧИСЕЛЪ.

Ариѳметика занимается, главнымъ образомъ, *правилами дѣйствій* надъ числами въ связи съ избранной системой нумераціи. Такъ, напр., способъ сложенія чиселъ 23 и 44 находится въ тѣсной связи съ тѣмъ, что въ первомъ числѣ часть единицъ сгруппирована въ двѣ, и во второмъ въ четыре единицы одного и того же высшаго разряда.

Теорія чиселъ занимается *свойствами чиселъ независимо* отъ системы нумераціи. Для этой науки лишь въ немногихъ случаяхъ можетъ имѣть значеніе, напр., то, что число 99 изображается двумя, а 101 тремя цифрами, но весьма важно то, что первое число составное, а второе—простое. Въ теоріи чиселъ единицы, входящія въ составъ числа, разсматриваются не сгруппированными въ десятки, а расположенными, какъ угодно; простѣйшій способъ ихъ расположенія былъ бы тотъ, когда числа представляются въ ихъ натуральной послѣдовательности, какъ бы вытянутыми въ одну линію.

Геометрія чиселъ разсматриваетъ числа размѣщенными по какой-нибудь опредѣленной системѣ и изучаетъ ихъ *свойства въ зависимости* отъ мѣста, ими занимаемаго.

Сначала мы займемся простѣйшимъ случаемъ, а, именно, тѣмъ, когда числа размѣщены въ ихъ натуральной послѣдовательности на равныхъ промежуткахъ рядами равной длины. Въ нашихъ таблицахъ за основаніе геометрической системы принято число сто. Числа расположены рядами по сто.

Затѣмъ будетъ указана геометрическая система иного характера и при помощи ея будутъ выводены нѣкоторыя новыя свойства чиселъ.

ГЛАВА I.

О дѣлителяхъ.

1. Приводимъ для образца часть одной страницы таблицы дѣлителей. Каждое число изображается въ ней пересѣченіемъ двухъ линій: горизонтальной и вертикальной. Слѣва горизонтальной указаны тысячи и сотни каждаго числа, а сверху и снизу вертикальной линіи указаны его десятки и единицы.

Напр., точка пересѣченія горизонтальной линіи 1 и вертикальной 13 есть мѣсто числа 113. Дуга, стоящая при ней, означаетъ, что это есть число простое. Точка пересѣченія, находящаяся сейчасъ же направо, читается какъ число 114. Стоящее при ней число 19 указываетъ, что 114 дѣлится на 19 безъ остатка. На пересѣченіи линій 7 и 03 находится число 703. Оно дѣлится на 37 и 19.

Признакъ дѣлимости на 3, какъ извѣстно, очень простъ, а именно: сумма цифръ числа дѣлится на 3. Поэтому дѣлимость чиселъ на 3 не было нужды указывать. Дѣлимость чиселъ на 2 или на 5 указывается ихъ послѣдней цифрой. Дѣлимость на 7, 11, 13, 17, 23 и 43 указана параллельными наклонными линіями. Наиболѣе частыя параллельныя линіи принадлежатъ дѣлителю 7. Такъ, напр., числа 301,203,105 дѣлятся на 7.

Линіи дѣлителя 11 идутъ всюду съ угла на уголъ квадрата. Напр., числа 803, 704, 605 дѣлятся на 11.

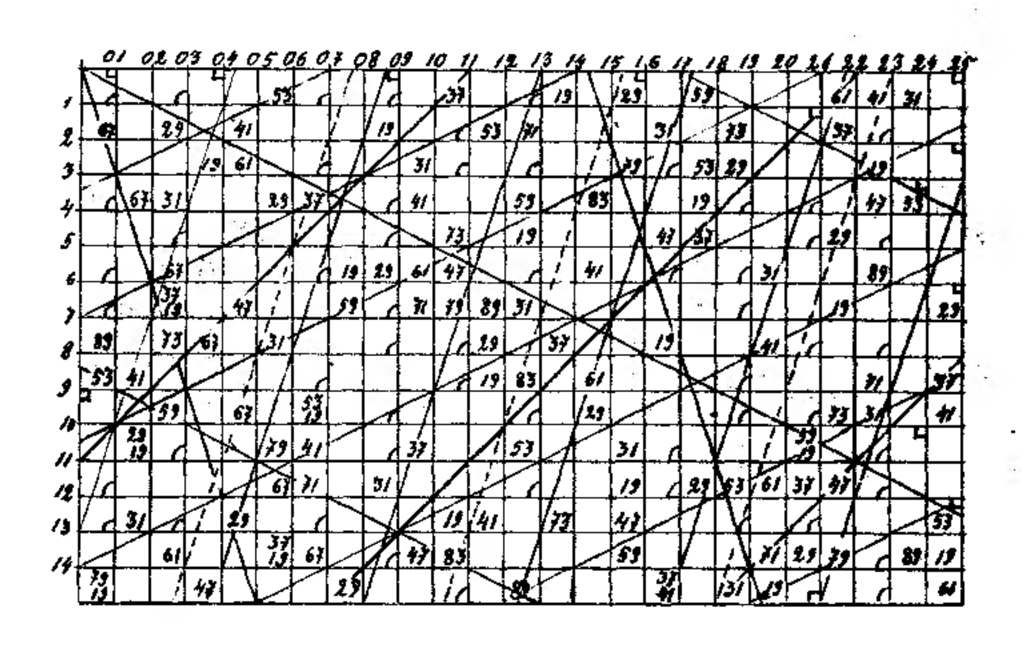
Линія, наклоненная вправо подъ тѣмъ же угломъ, подъ какимъ линія дѣлителя 7 наклонена влѣво, означаетъ дѣлителя 17. Напр., числа 408,510 дѣлятся на 17.

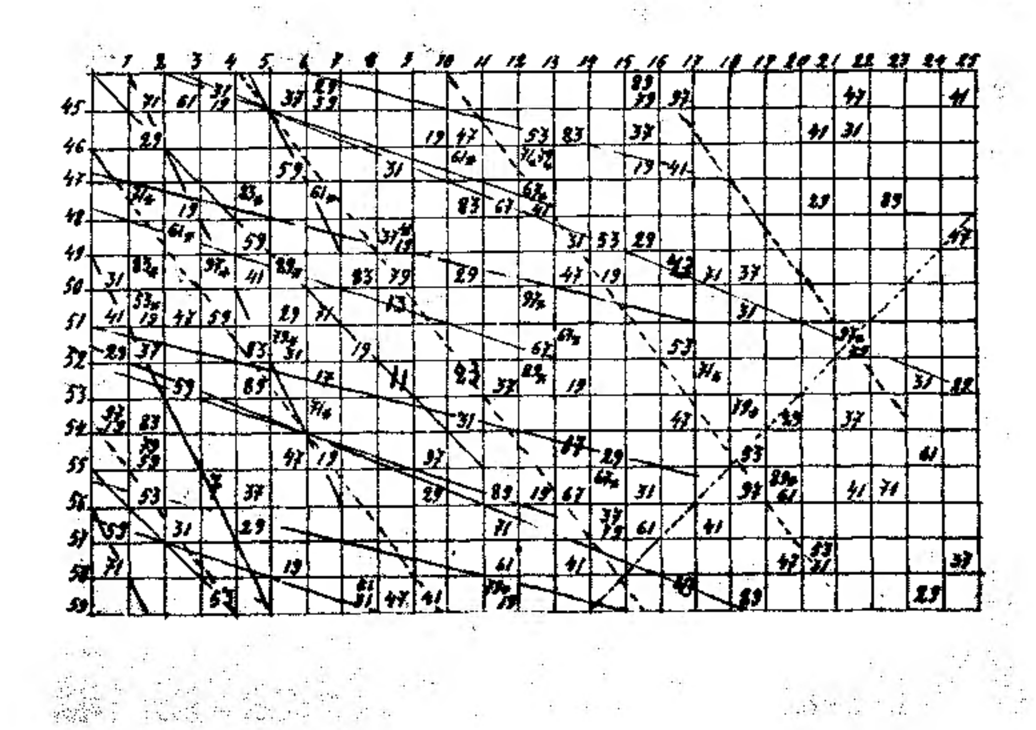
Линіи, идущія болѣе отвѣсно, суть линіи дѣлителей 13, 23 и 43. Линіи 13-ти суть наиболѣе частыя, линія 23-хъ параллельны первымъ, но идутъ рѣже и отличены отъ нихъ пунктиромъ. Линіи 43-хъ наклонены вправо и значительно рѣже предъидущихъ.

Число 507 дѣлится на 13, 506 на 23 и 11, 817 на 19 и на 43. Дѣлители обозначены при линіяхъ внизу 1-ой, 11-ой и 12-ой страницъ.

2. Чтобы ближе ознакомить съ таблицами мы приведемъ рѣшеніе съ ихъ помощью нѣсколькихъ задачъ, начиная съ простѣйшихъ.

a) *1-ая задача.* На часть 50 рублей куплено 47 пудовъ сѣна. Истрачена сумма, состоящая изъ неизвѣстнаго числа рублей и 16 копѣекъ. Найти эту сумму.





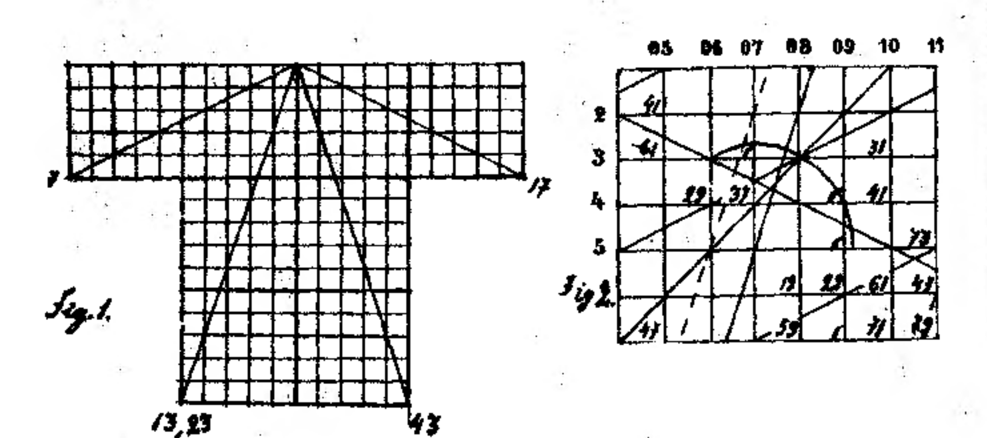


Fig. 1.
Fig. 2.

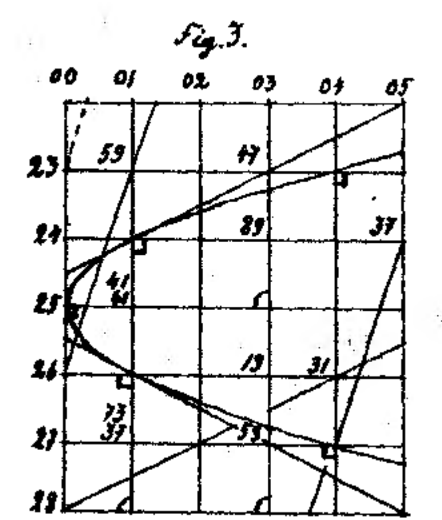


Fig. 3.

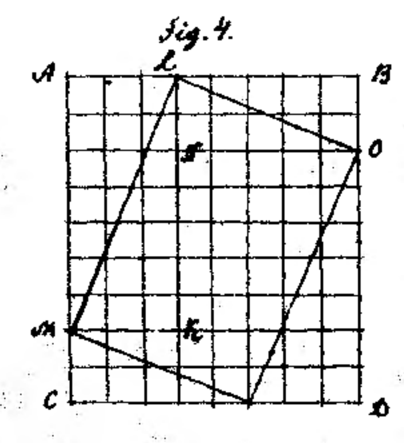


Fig. 4.

Такъ какъ искомое число оканчивается на 16, то идемъ по вертикальной линіи 16 внизъ, пока не встрѣтимъ дѣлителя 47. Мы встрѣчаемъ его на числѣ 1316. 13 руб. 16 коп. есть искомая сумма.

2-я задача. На часть 25 рублей куплено 29 бутылокъ вина. Истрачено неизвѣстное число рублей и 18 копѣекъ. Найти число рублей.

b) *Задача.* Стадо, состоящее изъ лошадей и коровъ, стоитъ 1411 рублей. Каждая лошадь стоитъ 73 рубля, каждая корова 25. Опредѣлить стоимость всѣхъ лошадей.

По смыслу задачи искомое число должно дѣлиться на 73 и равняться 1411 безъ числа, кратнаго 25

Если мы отъ 1411 будемъ подниматься вверхъ, то будемъ отнимать по сто, слѣд., по числу кратному 25. Находимъ дѣлителя 73 при числѣ 511. Это и есть стоимость лошадей.

3. Въ предъидущихъ примѣрахъ рѣшеніе было облегчено тѣмъ, что одно изъ данныхъ чиселъ было дѣлителемъ ста. Въ общемъ случаѣ вопросъ рѣшается также движеніемъ по прямой, но только не вертикальной, а наклонной.

Большинство задачъ, рѣшеніе которыхъ мы предлагаемъ въ нашей статьѣ, начиная отъ рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій 1-й степени до рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій высшихъ степеней и до нахожденія дѣлителей сколь угодно большихъ чиселъ, основывается на слѣдующемъ свойствѣ таблицы дѣлителей:

Если чрезъ два какія-нибудь числа *) проведемъ прямую, то всѣ числа, черезъ которыя пройдетъ эта прямая, будутъ или дѣлиться нацѣло на нѣкотораго дѣлителя, или при дѣленіи на него давать одинъ и тотъ же остатокъ.

Примѣръ. Возьмемъ число 1102 и сдѣлаемъ отъ него два перехода внизъ и три вправо; попадаемъ на число 1305. Такъ какъ каждый переходъ внизъ на одно дѣленіе прибавляетъ 100, а переходъ на одно дѣленіе вправо—1, то, дѣлая означенные переходы, мы прибавили 2 сотни и 3 единицы, т. е. прибавили число 203. Дѣлая ихъ вновь, мы опять прибавимъ число 203. Всѣ получаемыя числа 1102, 1305, 1508 и т. д. будутъ находиться на одной прямой.

Число 203 дѣлится на 29 и на 7. Поэтому, прибавляя его къ какому угодно числу, мы не измѣнимъ остатка при дѣленіи его на

*) Мы будемъ, ради краткости, часто, вмѣсто: „точка, изображающая число“, говорить просто: „число“.

29 или на 7. Число 1102 дѣлится на 29 нацѣло, а при дѣленіи на 7 оно даетъ остатокъ 3; поэтому и всѣ числа по прямой линіи 1305, 1508 и т. д. будутъ дѣлиться на 29, а при дѣленіи на 7 давать остатокъ 3.

Мы будемъ употреблять выраженіе: «идти по линіи, параллельной линіи даннаго дѣлителя». Это значитъ: дѣлать отъ одного числа къ другому столько переходовъ вверхъ или внизъ и, затѣмъ, вправо или влѣво, сколько надобно сдѣлать такихъ переходовъ между числами, кратными данному дѣлителю.

Задача. Найти число, дѣлящееся нацѣло на 41 и при дѣленіи на 19 дающее остатокъ, равный 15.

Сравнивъ на таблицѣ положеніе чиселъ, дѣлящихся на 19, мы видимъ, что для перехода отъ одного изъ нихъ къ другому, можно сдѣлать одинъ переходъ внизъ и пять влѣво. Переходя такимъ же способомъ отъ любаго числа къ новому числу, мы прибавляемъ къ первому число, кратное 19. Такимъ обрезомъ, отъ числа 15 переходимъ къ числу 110, затѣмъ къ числу 205 и т. д. Мы видимъ, что изъ чиселъ, лежащихъ по этой линіи, 205 дѣлится на 41. Это и будетъ искомое число.

Переходъ отъ одного числа къ другому облегчается линейкой. Чтобы она была наложена вѣрно, необходимо принимать во вниманіе не только двѣ точки, но цѣлый рядъ точекъ, черезъ которыя она должна проходить. Кромѣ того, линейка, главнымъ образомъ, пригодна для цѣльныхъ таблицъ, составленныхъ путемъ послѣдовательнаго склеиванія нѣсколькихъ страницъ.

Переходъ съ одной страницы на другую требуетъ нѣкотораго навыка. Пусть, напр., мы хотимъ отъ числа 1123 перейти параллельно дѣлителю 41. Для этого нужно отъ числа 1123 спуститься внизъ на 13-ую горизонтальную и по этой линіи сдѣлать 5 переходовъ впрово. На страницѣ 1-й мы можемъ сдѣлать изъ нихъ только два; остальные два дѣлаемъ по 13-й линіи на 2-й страницѣ и попадаемъ на число 1328.

4. Таблица дѣлителей можетъ оказать важныя услуги при многихъ вычисленіяхъ. Выгода сокращенія дробей, ради избѣжанія сложности въ вычисленіи при дѣйствіи съ ними, требуетъ умѣнія разлагать *всякое* число на его производителей. Поэтому, въ каждомъ руководствѣ къ Ариѳметикѣ, прежде, чѣмъ приступить къ дробямъ, указываютъ признаки дѣлимости на однозначныя числа, и иногда изъ двухзначныхъ—на 11 и 13. Но такое умѣнье разлагать числа на первоначальныхъ производителей, какое дается этими указаніями, является недостаточнымъ въ тѣхъ случаяхъ, когда разлагаемыя

числа состоятъ изъ производителей двузначныхъ и многозначныхъ. Въ этихъ случаяхъ вычисляющему приходится или идти наугадъ и дѣлить данныя числа на взятыхъ наудачу дѣлителей, или—признать данныя числа простыми и оставить ихъ безъ сокращенія; а отсюда запутанность вычисленій и невѣрность получаемыхъ результатовъ.

Мы не будемъ говорить о важности значенія таблицы дѣлителей при нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя и опредѣленіи наименьшаго кратнаго числа; оно ясно само собою. Укажемъ нѣкоторые другіе случаи ея приложенія.

a) *Примѣръ.* Требуется сократить дробь

$$\frac{383024}{999999}$$

полученную при обращеніи въ простую десятичной періодической дроби, имѣющей въ періодѣ 6 цифръ.

Хотя наша таблица предназначается для четырехзначныхъ чиселъ, но ею можно воспользоваться здѣсь для опредѣленія общихъ дѣлителей 6-ти значныхъ чиселъ. Знаменатель данной дроби разлагается такъ: 99. 10101, при чемъ 10101 = 3.7.13.37. Чтобы опредѣлить, имѣетъ ли числитель дѣлителей числа 10101, мы вычтемъ изъ него 10101, умноженное на двѣ послѣднія цифры 24,

$$\begin{array}{r} 383024 \\ 242424 \\ \hline 140600 \end{array}$$

и, отбросивъ нули въ остаткѣ, находимъ его въ таблицѣ, причемъ у числа 1406 получаемъ дѣлитель 37, общій съ 10101. Вычитаемое и остатокъ кратны 37, слѣд., и уменьшаемое 383024 кратно 37. Итакъ, данная дробь сокращается на 37.

2-й примѣръ. Возьмемъ для сокращенія дробь

$$\frac{50357}{999999}$$

Помноживъ двѣ послѣднія цифры числителя на 10101, мы получаемъ 575757>50357; поэтому вычитаніе производится такъ:

$$\begin{array}{r} 575757 \\ 50357 \\ \hline 525400 \end{array}$$

Число 5254, по таблицѣ, даетъ искомаго дѣлителя 37.

3-й примѣръ. Сократить дробь

$$\frac{273517}{999999}$$

Вычитая 273517 — 171717, получаемъ число 1018, которое, по таблицѣ, не имѣетъ дѣлителей общихъ съ 10101. Слѣд., данная дробь не сократима на 3, 7, 13 и 37. Остается испробовать дѣлимость числителя на 11.

Изъ предъидущаго проистекаетъ такое правило для рѣшенія даннаго вопроса. Нужно въ числителѣ отдѣлить двѣ послѣднія цифры и написать эту отдѣленную часть два раза. Затѣмъ разность полученнаго числа и предшествующей части искать въ таблицѣ. Если окажется, что эта разность имѣетъ дѣлителемъ 3, 7, 13 или 37, то дробь сокращается на этого дѣлителя.

Задачи. Сократить дробь

$$\frac{1708889}{999999} \qquad \text{Рѣшеніе} \qquad \begin{array}{r} 17088 \\ -\ 8989 \\ \hline 8099 \end{array}$$

Эту разность нужно найти въ таблицѣ.

b) Таблица имѣетъ важное приложеніе при извлеченіи квадратнаго корня изъ произведенія, когда корень извлекается точно.

Примѣръ. Найти

$$\sqrt{221.213.119\ 923\ 21}$$

При помощи таблицы разлагаемъ подкоренныхъ производителей на первоначальныхъ множителей и получаемъ

$$\sqrt{17.13.71.3.17.7.71.13\ 3.7}$$

откуда видно, что каждый производитель входитъ по два раза; слѣд., квадратный корень—17.13.71.3.7.; но изъ предъидущаго 17.13=221, 71.3 = 213.—Такимъ образомъ, самое дѣйствіе извлеченія корня становится излишнимъ; умноженіе данныхъ чиселъ весьма упрощается: остается перемножить только

221.213.7

2-й примѣръ. Такое приложеніе имѣетъ значеніе при вычисленіи площади треугольника по 3 даннымъ сторонамъ, если площадь выражается цѣлымъ числомъ. При этомъ вычисленіи, какъ извѣстно,

приходится извлекать квадратный корень изъ произведенія четырехъ чиселъ. Напр.,

$$\sqrt{9657.3663.2117.803}$$

Разлагая, находимъ

$$\sqrt{9.37.29.9.37.11.29.73\ 11.73}$$

откуда корень = 9.37.29.11.73 или 9657.803

ГЛАВА II.

Числа дробныя и несоизмѣримыя.

5. Въ таблицѣ дѣлителей не только точки пересѣченія горизонтальныхъ и вертикальныхъ линій выражаютъ числа, но вообще всякая точка вырожаетъ нѣкоторое число.

Если мы отъ какого-нибудь числа подвигаемся вправо на одно дѣленіе, то мы этимъ самымъ прибавляемъ къ нему единицу. Если же подвинемся только на часть дѣленія, то прибавимъ только часть единицы. Напр., если отъ числа 314 подвинемся вправо на $^1/_3$ дѣленія, то получимъ точку, выражающую число $314^1/_3$. Мы видимъ, что чрезъ нее проходитъ линія дѣлителя 23. Это значитъ, что, послѣ обращенія числа $314^1/_3$ въ неправильную дробь, числитель дѣлится на 23.

Если отъ какого-нибудь числа опускаемся внизъ на одно дѣленіе, то прибавляемъ сотню. Если же опускаемся на часть дѣленія, то прибавляемъ соотвѣтственную часть сотни. Напр., если отъ того же числа 314 опустимся на $^1/_2$ дѣленія внизъ, то получимъ точку, изображающую число 314 + 50 или 364. Черезъ эту точку проходитъ линія дѣлителя 7. Это показываетъ, что 364 дѣлится на 7.

Другіе примѣры: $716^2/_3$ имѣетъ множителемъ 43; $303^1/_3$ имѣетъ множителемъ 13.

Отъ числа 408 подвинемся въ право на $^1/_2$ дѣленія и потомъ внизъ на $^1/_4$. Получимъ число $408 + \frac{1}{2} + 25$ или $433^1/_2$. Самыя простыя геометрическія соображенія показываютъ, что мы попадаемъ на про-

ходящую здѣсь линію дѣлителя 17. И такъ, число $433\frac{1}{5}$ имѣетъ множителемъ 17.

6) Конецъ каждой горизонтальной строки *) выражаетъ собою то же число, какъ и начало слѣдующей. Если черезъ эти двѣ точки проведемъ прямую, то всѣ точки этой прямой выразятъ одно и то же число.

Такъ, напр., число 200 выразится точкою, начинающей строку 2., точкой, идущей на $\frac{1}{5}$ дѣленія внизъ отъ числа 120, точкой, идущей на $\frac{2}{5}$ внизъ отъ числа 140 и множествомъ другихъ точекъ.

Это свойство таблицы позволяетъ находить дѣлителей чиселъ, выходящихъ изъ предѣловъ таблицы.

На чертежѣ (1) представлены тѣ же линіи дѣлителей 7, 11, 17, 13, 23 и 43, но квадраты сдѣланы въ бо́льшемъ масштабѣ и стороны ихъ раздѣлены продольными и поперечными линіями на 5 частей.

Мы покажемъ, какъ можно найти дѣлителей числа 1246 при помощи только одной приводенной нами части таблицы и этого чертежа.

Раздѣлимъ 1246 на 5. Получимъ $249\frac{1}{5}$.

Число $249\frac{1}{5}$ выражается различными точками.

Для насъ важна одна изъ слѣдующихъ пяти. Будемъ отнимать по 20 единицъ и вмѣсто нихъ прибавлять по пятой части сотни, т.-е., другими словами, отъ числа $249\frac{1}{5}$ переходить влѣво на 20 дѣленій и спускаться въ низъ на $\frac{1}{5}$-ю дѣленія. Получимъ числа:

$$229\frac{1}{5}+\frac{1}{5}.100,\ 209\frac{1}{5}+\frac{2}{5}.\ 100 \text{ и т. д.}$$

Число $209\frac{1}{5}+\frac{2}{5}.\ 100$ разсмотримъ на таблицѣ.

Если мы отъ числа 209 перейдемъ на $\frac{1}{5}$ вправо и на $\frac{2}{5}$ внизъ, то попадаемъ на линію дѣлителя 7.

Чертежъ (1) показываетъ намъ, что здѣсь мы дѣйствительно попадаемъ на самую линію дѣлителя 7, а не вблизи ея.

И такъ, 1246 дѣлится нацѣло на 7.

---

*) Каждая горизонтальная строка начинается на 1-й, 5-й или 9-й страницѣ, а оканчивается на 4-й, 8-й или 12-й. Если по первой страницѣ идемъ вправо, то нужно переходить на 2-ю, если внизъ то—на 5-ю.

Всѣ 12 страницъ могутъ быть склеены вмѣстѣ въ одинъ квадратъ. При этомъ можно 4-ю страницу помѣщать не только послѣ 3-й, но и предъ 1-й. При этомъ нужно только приклеить ее такъ, чтобы конецъ одной строки пришелся къ началу слѣдующей.

Другой примѣръ. Найти дѣлителей числа 1859.
Дѣлимъ на 5 и изслѣдуемъ числа:

$$371\frac{4}{5};\ 351\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot 100;\ 331\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\cdot 100;\ 311\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot 100$$

Если отъ числа 311 перейти на $\frac{4}{5}$ дѣленія вправо и на $\frac{3}{5}$ внизъ, то попадаемъ на точку, о которой можно *предположить*, что она лежитъ на проходящей здѣсь линіи дѣлителя 13. На чертежѣ (1) мы можемъ удостовѣриться въ этомъ. Итакъ, 1859 дѣлится нацѣло на 13.

Примѣры. Найти тѣмъ же способомъ дѣлителей чиселъ 5117; 6902.

Такъ какъ наша таблица составлена въ продѣлахъ 10000, то всякое число, имѣющее одного изъ дѣлителей 7, 11, 13, 17, 23 и 43 и не превышающее 50000, можетъ быть разложено этимъ способомъ.

7. Дѣлители, выраженные не линіями, а числами, не могутъ быть узнаны указаннымъ способомъ. Нами составлена и издана таблица, на которой дѣлители 7, 11, 13 17, 23 и 43 указаны красными линіями, а всѣ остальные черными. По этой таблицѣ всякое число, не превышающее 50000, имѣющее двузначныхъ дѣлителей, можетъ быть разложено на множителей приведеннымъ способомъ, т. е. посредствомъ дѣленія на 5. Только дѣлители 41, 61, 59 и 79 не могутъ быть обнаружены дѣленіемъ числа на 5, вслѣдствіе того, что точка дѣленія упадаетъ здѣсь на самыхъ вертикальныхъ линіяхъ. Этихъ четырехъ дѣлителей можно испробовать непосредственно.

8. Нѣкоторыя геометрическія свойства таблицы дѣлителей *). 1) Точка пересѣченія двухъ линій дѣлителей выражаетъ неправильную дробь, которой числитель дѣлится нацѣло на того и другаго дѣлителя.

Примѣръ. Числа 602, 702, 403 и 903 лежатъ въ вершинахъ двухъ подобныхъ треугольниковъ, у которыхъ (за основанія приняты здѣсь вертикальныя стороны), какъ не трудно видѣть изъ сравненія наибольшихъ сторонъ, стороны праваго треугольника впятеро больше сторонъ лѣваго. Отсюда слѣдуетъ, что и высота лѣваго треугольника въ пять разъ меньше высоты праваго; такъ какъ обѣ высоты вмѣстѣ составляютъ полное дѣленіе, то, слѣд., высота лѣваго

*) Эта часть II-ой главы имѣетъ главнымъ образомъ теоретическій интересъ и назначается для лицъ, знакомыхъ съ аналитической геометріей. Неспеціалисты могутъ прямо перейти къ III-ей главѣ.

составляетъ $\frac{1}{6}$ часть полнаго дѣленія. Поэтому, чтобъ попасть въ вершину треугольника, нужно отъ числа 602 перейти на $\frac{1}{6}$ дѣленія вправо и на $\frac{1}{2}$ дѣленія внизъ. Итакъ, эта точка выражаетъ число $602\frac{1}{6}+50$ или $652\frac{1}{6}$. Обративъ это число въ неправильную дробь, найдемъ, что ея числитель дѣлится на 13 и 43.

Опредѣленіе числа, выраженнаго точкою пересѣченія двухъ линій, никогда не можетъ встрѣтить затрудненія. Эта точка всегда лежитъ въ вершинѣ пары подобныхъ треугольниковъ съ горизонтальнымъ основаніемъ и пары съ вертикальнымъ основаніемъ.

Возьмемъ точку, лежащую между горизонтальнымъ линіями 12 и 13 и вертикальными 08 и 09, на пересѣченіи линіи дѣлителей 17 и 13. У треугольниковъ съ горизонтальными основаніями у верхняго основаніе есть 2, а у нижняго $\frac{1}{3}$, слѣд., первое въ 6 разъ больше втораго и потому высота его есть $^6/_7$ дѣленія. У треугольниковъ съ вертикальнымъ основаніемъ у лѣваго основаніе есть $2^1/_2$, а у праваго 1. Слѣд., у лѣваго основаніе въ $^5/_2$ раза болѣе, чѣмъ у праваго; отсюда, высота его есть $^5/_7$ дѣленія. Итакъ, чтобы попасть въ изслѣдованную нами точку пересѣченія, нужно отъ числа 1208 перейти вправо на $^5/_7$ дѣленія и внизъ на $^6/_7$. Получаемъ число $1208\frac{5}{7}+\frac{6}{7}.\,100$ или $\frac{9061}{7}$.

2) Если пересѣчемъ линію какого нибудь дѣлителя окружностью или иною линіей, то полученное въ пересѣченіи число, будетъ ли оно раціональное или ирраціональное, непремѣнно будетъ имѣть множителемъ даннаго дѣлителя.

Для примѣра примемъ точку, изображающую число 507 за центръ (черт. 2) и проведемъ окружность радіусомъ равнымъ $\sqrt{5}$. Она пройдетъ черезъ число 306; потомъ пересѣчетъ линію дѣлителя 23 въ числѣ $23\,\frac{207-13.\,\sqrt{41}}{10}$, линію дѣлителя 13 въ числѣ $13\left(39-\frac{23}{\sqrt{2}}\right)$, линію дѣлителя 17 въ раціональномъ числѣ $17.\,\frac{138}{5}$ и т. д.

3) Числа, представляющія точные квадраты, лежатъ на нѣкоторой параболѣ. Одна изъ такихъ парабол (черт. 3) имѣетъ вершину въ числѣ 2500; затѣмъ проходитъ черезъ числа 2401, 2304 и т. д. Прежде,

чѣмъ пройти черезъ число 2401, порабола пересѣкаетъ линію дѣлителя 13 въ числѣ $13\frac{3439-23\sqrt{13}}{18}$

4) Если соединимъ три ближайшія между собою точки, не лежащія на одной прямой и выражающія числа, кратныя какому ниб. дѣлителю, то двойная площадь этого треугольника ровна дѣлителю. При этомъ за линейную единицу принимается одно дѣленіе таблицы.

Для примѣра возьмемъ числа 410, 615, 1107 и 1312. Они лежатъ въ вершинахъ нѣкотораго параллелограмма. Площадь этого параллелогр определить очень легко. Для этого нужно изъ площади прямоугольника (черт. 4) ABCD вычесть четыре площади треугольниковъ или, что все равно, вычесть площади прямоугольниковъ AMKL и LBON

Получимъ $8.9=72,\ 7.3=21;\ 2.5=10$

$$72-21-10=41$$

5) Возьмемъ опять числа 410, 615 и 1107. Чтобы отъ перваго перейти ко второму, нужно прибавить число 205 или, иначе, дѣлителя 41 взятаго 5 разъ; при этомъ опускаемся на 2 дѣленія. Чтобы отъ перваго перейти къ третьему, нужно придать число 697 или иначе, общаго дѣлителя, взятаго 17 разъ; при этомъ нужно опуститься на 7 дѣленій внизъ. Эти числа 5, 2, 17 и 7 удовлетворяютъ тому же условію, какъ члены друхъ рядомъ стоящихъ подходящихъ дробей

$$5.7-2.17=1.$$

Другой примѣръ. Возьмемъ числа 310, 713 и 806. Эти числа кратны дѣлителю 31. Получимъ изложеннымъ способомъ равенство

$$13.5-4.16=1.$$

Всѣ эти теоремы легко доказываются въ общемъ видѣ.

ГЛАВА III.

Таблица остатковъ.

9. Въ этой таблицѣ даны остатки при дѣленіи на двузначныхъ дѣлителей чиселъ, оканчивающихся четырьмя нулями, отъ 10,000 до 1,000.000.

Положимъ, что мы хотимъ узнать остатокъ при дѣленіи 47 съ четырьмя нулями, т. е. числа 470,000 на 19. Беремъ горизонтальную строку, имѣющую 47 въ началѣ, и идемъ по ней до точки, при которой встрѣчаемъ 19. Сверху вертикальной линіи, проходящей через эту точку, находимъ искомый остатокъ 16.

Другой примѣръ. Найти остатокъ при дѣленіи 520,000 на 53. Отвѣтъ: остатокъ равенъ 17.

Дѣлители 7, 11, 13, 17, 23 и 43 и здѣсь, какъ въ таблицѣ дѣлителей, указаны линіями.

Эти линіи можно узнавать, во 1-хъ, потому, что на нихъ во многихъ мѣстахъ написаны эти числа 7, 11, 13 и т. д.; во 2-хъ потому, что линія упирается своимъ концомъ въ вертикальную линію, означенную тѣмъ же числомъ. Такъ, напр., всѣ линіи, обрывающіяся на вертикальной линіи 13, соотвѣтствуютъ дѣлителю 13 470,000 при дѣленіи на 13 даетъ остатокъ 11, при дѣленія на 23 (пунктирная линія) даетъ остатокъ 18. 450,000 при дѣленіи на 7, 13, 43 и 23 даетъ остатокъ 5. (Всѣ эти 4 линіи пересѣкаются здѣсь въ одной точкѣ).

Остатки при дѣленіи на числа, большія 50, очевидно, могутъ быть сами больше 50. Ради выигрыша мѣста такіе остатки помѣщены на той же таблицѣ, но означены *. Число, стоящее со звѣздочкой, относится не къ точкѣ, лежащей вправо и внизъ, но къ точкѣ, лежащей отъ нея налѣво и кверху. Къ остатку, указанному сверху, надобно прибавлять въ этомъ случаѣ 50. Напр., 490,000 при дѣленіи на 83 даетъ остатокъ не 1, а 51; при дѣленіи на 97 даетъ остатокъ 53; при дѣленіи на 89—остатокъ 55.

Дѣлимость на 73 указана точечною линіей. На 13 й и 17-й страницѣ при 73 поставлены звѣздочки. Это показываетъ, напр., что остатокъ при дѣленіи 770,000 на 73 не 19, а 69.

10. По таблицѣ остатковъ можно находить остатки при дѣленія чиселъ, оканчивающихся не только четырьмя нулями, но сколь угодно большимъ числомъ нулей, не производя дѣленія.

Найти остатокъ при дѣленіи 49 съ 14-ю нулями на 89. Прежде всего видимъ, что 49 съ 4-мя нулями при дѣленіи на 89 даетъ остатокъ 55. При этихъ 55 остается только 10 нулей Беремъ изъ нихъ 4 нуля. 55 съ 4 нулями при дѣленіи на 89 даетъ остатокъ 69. Этотъ остатокъ имѣетъ уже только 6-ть нулей. Беремъ изъ нихъ 4. На 17-й страницѣ находимъ, что остатокъ отъ дѣленія на 89 этого числа есть 72. Этотъ остатокъ имѣетъ только 2 нуля, слѣд., достаточно раздѣлить 7200 на 89, чтобъ, узнать остатокъ при дѣленіи на 89 числа 49 съ 14-ю нулями. Во всемъ сказанномъ легко убѣдиться, раздѣливъ на самомъ дѣлѣ 4900000000000000 на 89.

11. Укажемъ на нѣкоторыя приложенія таблицы остатковъ.

1) Положимъ, что требуется обратить $\frac{52}{83}$ въ десятичную дробь съ точностью до 9-ти десятичныхъ знаковъ.

При этомъ намъ приходится дѣлить 52 съ 9-ю нулями на 83 Произведя дѣленіе, получаемъ въ частномъ 0,626506024 и въ остаткѣ 8 Требуется провѣрить результатъ, не производя дѣленія.

Беремъ изъ числа 52 съ 9 нулями 4 нуля и находимъ по таблицѣ, что 52 съ 4 нулями, при дѣленіи на 83 даетъ остатокъ 5. При 5 остается пять нулей; по таблицѣ 500000 даетъ остатокъ 8. который и есть остатокъ отъ дѣленія 52 съ 9 нулями на 83; слѣд. дѣленіе было произведено вѣрно.

2-й примѣръ. Обратить дробь $\frac{675}{8633}$ въ десятичную съ точностью до 8 десятичныхъ знаковъ и провѣрить результатъ съ помощью таблицы.

Мы дѣлимъ 675 съ 8 нулями на 8633 и получаемъ въ частномъ 0,07818834 и въ остаткѣ 6078.

По таблицѣ дѣлителей находимъ, что 8633 дѣлится на 89. Если провѣряемое нами дѣленіе вѣрно, то остатокъ отъ дѣленія 675 съ 8-ю нулями на 89 долженъ быть равенъ остатку отъ дѣленія на того же дѣлителя 89 остатка 6078. Дѣля 675 на 89. получаемъ остатокъ 52, при которомъ 8 нулей; беремъ изъ нихъ 4 нуля и находимъ, что остатокъ отъ дѣленія 52 съ 4 нулями на 89 есть 62. Беремъ 62 и остальные 4 нуля и находимъ искомый остатокъ; онъ равенъ, по таблицѣ, 26.

Дѣля 6078 на 89 также получаемъ въ остаткѣ 26. Итакъ, дѣленіе было произведено вѣрно.

12. Опредѣленіе двузначныхъ дѣлителей сколь угодно большаго числа.

Нахожденіе дѣлителей чиселъ, превышающихъ 10,000, основывается на слѣдующихъ, весьма простыхъ положеніяхъ:

a) Сумма двухъ чиселъ дѣлится на какого-нибудь дѣлителя нацѣло, если остатокъ при дѣленіи одного слагаемаго, приданный къ другому, дѣлаетъ его кратнымъ дѣлителю.

Примѣръ. Сумма 44 + 19 дѣлится на 7, потому что остатокъ отъ 44 (2), приданный къ 19, дастъ 21, кратное 7.

b) Разность дѣлится нацѣло, если остатокъ отъ уменьшаемаго равенъ остатку отъ вычитаемаго.

Возьмемъ число 5,000,003 и опредѣлимъ его двузначныхъ дѣлителей.

Разложимъ его на два слагаемыхъ: первое есть 5,000,000 или, иначе 50 десятковъ тысячъ, умноженное на 10, а второе 3.

Чтобы узнать, дѣлится ли взятое нами число на какого-нибудь дѣлителя, нужно найти остатокъ при дѣленіи на него 500,000, умножить на 10 и придать 3; затѣмъ смотрѣть, получится ли число кратное разсматриваемому дѣлителю.

По таблицѣ остатковъ видимъ, что 50 десятковъ тысячъ при дѣленіи на 31 даютъ остатокъ 1; этотъ остатокъ умножаемъ на 10 и прибавляемъ къ нему 3. Полученное число 13 не дѣлится на 31, а слѣд., и данное число не дѣлится на 31.

500,000 при дѣленіи на 23 (пунктирная линія) даетъ остатокъ 3. Получаемое по предъидущему способу число 3.10 + 3 не дѣлится на 23, слѣд., и данное число не дѣлится на 23.

Продолжая поступать такъ далѣе, будемъ имѣть:

4.10 + 3 или 43 не дѣлится на 7, слѣд., и данное число не дѣлится на 7.

53 не дѣлится на 41, слѣд., и данное число не дѣлится на 41.

63 не дѣлится на 11, 73 не дѣлится на 13, слѣд., и данное число не дѣлится на 11 и 13.

83 дѣлится на 83, слѣд. и данное число кратно 83.

Возьмемъ число 5,000,006. Разлагая его на два числа, имѣемъ 5,000,000, т. е. 500,000.10 и второе 6.

По предъидущему способу: 16 не дѣлится на 31, 36 не дѣлится на 23; 46 на 7, 56 на 41 также не дѣлится. 66 дѣлится на 11, слѣд., 11 есть дѣлитель даннаго числа.

Далѣе: 76 на 13, 86 на 83, 96 на 79 не дѣлятся.

116 дѣлится на 29, слѣд., 29 также есть дѣлитель даннаго числа; 17 также будетъ дѣлителемъ.

B.

[illegible]

25		[illegible]		
24		[illegible] … 58 59 60 61 62 63 … [illegible]		
23		[illegible]		
22		[illegible]		
21		[illegible]		
20		[illegible]		
19		[illegible]		
[illegible]		[illegible]		
[illegible]		[illegible]		
[illegible]		[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
14	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	5	[illegible]	[illegible]	[illegible]
7	5	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	6	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]		

13. Если часть числа, выраженная четырьмя послѣдними цифрами, больше 100, то можно пользоваться совмѣстно таблицей остатковъ и таблицей дѣлителей.

Для примѣра возьмемъ число 501501.

Разлагаемъ его на 2 части 500000 и 1501. 1501 находимъ въ таблицѣ дѣлителей. Мы замѣчаемъ, что оно дѣлится на 19 и на 79; но 500000 не дѣлится на эти числа, а потому и данное число на нихъ не дѣлится. Далѣе мы видимъ, что къ 1501 нужно придать 3, чтобы получить число, дѣлящееся на 47. Запоминаемъ это, произнося: три : дѣлитель сорокъ семь

Смотримъ въ таблицѣ остатковъ по горизонтальной линіи 50, есть ли такой дѣлитель соотвѣтственно остатку 3. Такого дѣлителя нѣтъ. Идемъ по таблицѣ дѣлителей далѣе вправа, считая переходы; произносимъ: четыре: дѣлители семь и сорокъ три. Въ таблицѣ остатковъ видимъ на той же горизонтальной линіи дѣлителя 7 соотвѣтственно остатку 4. (Этотъ дѣлитель указанъ линіей). Идемъ далѣе. Считаемъ: пять; шесть: дѣлитель одиннадцать. Въ таблицѣ остатковъ встрѣчаемъ линію дѣлителя 11 соотвѣтственно остатку 6 Далѣе произносимъ: семь: дѣлители 29 и 13. Въ таблицѣ дѣлителей встрѣчаемъ линію дѣлителя 13. Итакъ данное число дѣлится на 7, 11 и 13.

Раздѣливъ его на произведеніе этихъ чиселъ, можно узнать остальныхъ множителей. (501 или 3.167).

Если число больше милліона, то непосредственно прикладывать таблицу остатковъ нельзя. Мы укажемъ, какъ нужно поступить въ этомъ случаѣ.

Возьмемъ число 1,179,091.

Замѣчая, что число десятковъ тысячъ (117) дѣлится на 3, можемъ представить данное число такъ

$$390000.3 + 9091.$$

Затѣмъ число 9091 находимъ въ таблицѣ дѣлителей и подвигаемся отъ него вправо на 3 дѣленія въ то время, какъ въ таблицѣ остатковъ, также вправо, подвигаемся на одно.

Можно поступить другимъ способомъ.

Число 1179091 можно представить какъ 1180000--909 или, что одно и то же, какъ 590000 2—909.

Для дѣлимости нацѣло остатокъ уменьшаемаго долженъ равняться остатку вычитаемаго. Остатокъ 590000 при дѣленіи на какого ниб. дѣлителя, умноженный на 2, долженъ равняться остатку 909 при

дѣленія на того же дѣлитель. По таблицѣ дѣлителей мы должны здѣсь подвигаться *влѣво*

Отъ числа 909 нужно подвигаться влѣво на два дѣленія въ то время, какъ въ таблицѣ остатковъ отъ числа 590000 подвигаемся вправо на одно.

Считаемъ переходы влѣво (каждый по два дѣленія) одинъ; два; три: дѣлители 7 и 43. Въ таблицѣ остатковъ при вертикальной линіи 3 этихъ дѣлителей нѣтъ Далѣе: четыре: дѣлители 17 и 53. Въ таблицѣ остатковъ находимъ дѣлителя 53. Это число есть дѣлитель даннаго.

14. Въ случаѣ весьма большихъ чиселъ переходъ отъ одного числа къ другому можетъ быть облегченъ проведеніемъ линіи на таблицѣ дѣлителей.

Возьмемъ число 38860111.

Здѣсь десятковъ тысячъ 3886. Изъ таблицы дѣлителей усматриваемъ, что 3886 равно 58.67. Слѣд., данное число можно представить такъ:

$$580000.67 + 111.$$

Итакъ отъ числа 111 нужно въ таблицѣ дѣлителей переходить на 67 дѣленій вправо и вмѣстѣ съ тѣмъ въ таблицѣ остатковъ на одно отъ 580000.

Покажемъ, какъ можно облегчить эти переходы.

Прибавляя по 67 къ 111 получаемъ числа 178, 245, 312 и т. д.

Мы замѣчаемъ, что, прибавляя къ 111 67 три раза, получаемъ число 312, весьма близко лежащее на таблицѣ дѣлителей къ числу 111.

Итакъ, намъ можно по таблицѣ дѣлителей идти отъ числа 111 параллельно линіи дѣлителя 67, т. е. на 2 дѣленія внизъ и на одно вправо. При этомъ одновременно въ таблицѣ остатковъ отъ числа 580000 вправо черезъ 3 дѣленія.

Если не встрѣтимъ искомаго дѣлителя, то въ таблицѣ дѣлителей нужно идти отъ 178 параллельно тому же направленію, а одновременно въ таблицѣ остатковъ подвигаться соотвѣтственно остаткамъ 1 4, 7 и т д.

Поступая такимъ образомъ, будемъ имѣть 111, дѣлитель 37. 58 не дѣлится на 37. Одинъ: дѣлитель 13. Остатку 3 этого дѣлителя не соотвѣтствуетъ.

Два: дѣлитель 19. Находимъ, что остатку 6 соотвѣтствуетъ этотъ дѣлитель.

Три: дѣлители 7 и 17.

Четыре: дѣлитель 61. Находимъ, что остатку 12 соотвѣтствуетъ этотъ дѣлитель. Итакъ, данное число дѣлится на 19 и на 61.

15. Геометрическія свойства таблицы остатковъ тѣ же, какъ таблицы дѣлителей. Въ самомъ дѣлѣ, можно считать, напр., что въ приведенной части таблицы 1 ая точка (44) означаетъ число 440000; это число дѣлится на 11. Слѣдующая вправо означаетъ 439999. Оно дѣлится на 7. Слѣдующее число 439998 дѣлится на 13 и т. д. Переходъ на одно дѣленіе внизъ означаетъ увеличеніе на 10000.

Если возьмемъ три ближайшія другъ къ другу точки, при которыхъ стоитъ одинъ и тотъ же дѣлитель, и построимъ на нихъ параллелограмъ, то площадь его равна этому дѣлителю.

Изъ этихъ параллелограммовъ замѣчательны тѣ, которые суть квадраты. На таблицѣ дѣлителей квадретъ соотвѣтствуетъ дѣлителю 73; на таблицѣ остатковъ дѣлителю 17. 73 есть дѣлитель 100^2+1; 17 есть дѣлитель 10000^2+1.

ГЛАВА IV.

Таблица квадратовъ и ея приложенія.

16. Такъ какъ таблицы квадратовъ имѣютъ весьма много примѣненій, то онѣ помѣщены во многихъ сочиненіяхъ. Большинство ихъ даетъ квадраты трехзначныхъ чиселъ. Обыкновенный способъ расположенія ихъ состоитъ въ томъ, что слѣва помѣщаются числа, а справа — ихъ квадраты.

Разсмотримъ таблицы помѣщенныя при механикѣ Бернулли *). Онѣ даютъ квадраты чиселъ отъ 1 до 1600.

Приводимъ часть ихъ

641	410881
642	412164
643	413449
644	414736

Удобство ихъ заключается въ легкости пріискиванія. Квадратъ 642 равенъ 412164.

Неудобство заключается въ трудности повѣрки ихъ. Чтобы провѣрить таблицы, нужно найти разности квадратовъ чиселъ (для приведенныхъ эти разности будутъ 1283, 1285, 1287), и затѣмъ смотрѣть, возрастаютъ ли онѣ на одно и то же число.

---

*) Спутникъ механика. Бернулли. Второе изданіе, дополненное Гутковскимъ. С.-П.Б. 1868.

Такъ какъ эта повѣрка очень трудна, то вкралось множество ошибокъ, дѣлающихъ таблицы совершенно негодными къ употребленію. Такъ, напр., на стран. 32 три ошибки; невѣрны квадраты чиселъ 1001, 1006, 1011. На стран. 25 невѣрны 645^2, 657^2, 667^2.

Существуютъ таблицы четырезначныхъ чиселъ. Мы имѣли таковыя подъ руками въ нѣмецкой книгѣ, изданной Lais'омъ, и предназначенной для геодезическихъ вычисленій *).

Числа въ таблицахъ этихъ расположены такъ, что повѣрка почти невозможна. Ошибокъ множество. По двѣ на страницѣ встрѣчается часто. Три не рѣдкость. На стран. 300 подъ-рядъ не вѣрны квадраты чиселъ 2,570, 2,571 и 2,572. На страницѣ 329-ой ошибки идутъ не подъ-рядъ, но за то ихъ четыре. На 211-ой пять ошибокъ.

17. Составленныя нами таблицы расположены такъ, что онѣ занимаютъ мало мѣста, способъ составленія ихъ и способъ повѣрки просты, но за то пріискиваніе квадратовъ требуетъ нѣкотораго навыка.

На страницахъ I—VIII въ первыхъ девяти стречкахъ помѣщены квадраты трехзначныхъ чиселъ. Затѣмъ на этихъ страницахъ помѣщены квадраты четырезначныхъ чиселъ до 5099. Квадраты чиселъ отъ 5100 до 9999 находятся на слѣдующихъ 8 страницахъ.

Для образца приводимъ часть 1-ой стреницы.

		00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
		00	01	04	09	16	25	36	49	64	81	00	21	44
1		100	102	104	106	108	110	112	114	116	118	121	123	125
2		400	404	408	412	416	420	424	428	432	436	441	445	449
3		900	906	912	918	924	930	936	942	948	954	961	967	973
4		1600	1608	1616	1624	1632	1640	1648	1656	1664	1672	1681	1689	1697
5		2500	2510	2520	2530	2540	2550	2500	2570	2580	2590	2601	2611	2621
6		3600	3612	3624	3636	3648	3660	3672	3684	3696	3708	3721	3733	3745
7		4900	4914	4928	4942	4956	4970	4984	4998	5012	6026	5041	5055	5069
8		6400	6416	6432	6448	6464	6460	6496	6512	6528	6544	6561	6577	6593
9		8100	8118	8136	8154	6172	8160	8208	8226	8244	8262	8281	8299	8317
10	1	0000	0020	0040	0060	0080	0100	0120	0140	0160	0180	0201	0221	0241
11	1	2100	2123	2144	2166	2188	2210	2232	2254	2276	2298	2321	2343	2365
12	1	4400	4424	4448	4472	4496	4520	4544	4568	4592	4516	4641	4965	4689
13	1	6900	6926	6952	6078	7004	7030	7056	7062	7108	7134	7161	7187	7213
14	1	9600	9828	9656	9684	9712	9740	9796	9796	9824	9652	9881	9909	9837
15	2	2500	2530	2560	2590	2620	2650	2680	2710	2740	2770	2801	2831	2861

*) Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie и пр. von Prof. Sawitsch. Deutsch bearbeitet von Lais. 1863.

Первая цифра трехзначнаго или первыя двѣ цифры четырезначнаго числа находятся слѣва, послѣднія двѣ цифры сверху.

Найти квадратъ 609.

6 ищемъ слѣва, 09 сверху; затѣмъ выписываемъ 3708, стоящее на пересѣченіи вертикальной и горизонтальной линій, и приписываемъ къ 3708 еще 81, стоящее сверху во 2-ой строчкѣ.

Итакъ $609^2 = 370881$

Точно также $811^2 = 657721$.

Найти квадратъ 1207.

Отыскавъ 12 слѣва и 07 сверху, пишемъ сначала 1, стоящую во второмъ столбцѣ слѣва, потомъ 4568, находящееся на пересѣченіи линій горизонтальной и вертикальной и приписываемъ 49, стоящее вверху. Итакъ

$$1207^2 = 1456849$$

Точно также

$$1411^2 = 1990921.$$

Звѣздочка, стоящая передъ нѣкоторыми группами 4-хъ цифръ, показываетъ, что число, которое нужно написать передъ ними, взявъ его изъ втораго столбца, нужно увеличить единицей. Напр.

3606^2 равно не 12003236, но 13003236

Точно также

$$3611^2 = 13039321.$$

Квадраты двузначныхъ чиселъ также находятся въ нашей таблицѣ, а именно въ 3-емъ столбцѣ 1-ой или IX страницъ нужно отбросить два нуля.

$$13^2 = 169,\ 47^2 = 2209,\ 91^2 = 8281$$

18. Повѣрка таблицъ очень легка. Въ каждомъ столбцѣ послѣднія двѣ цифры повѣряются прибавленіемъ или отниманіемъ небольшаго числа, постояннаго для всего столбца.

Такъ, напр., въ столбцѣ 04 послѣднія двѣ цифры идутъ, увеличиваясь на 8, въ столбцѣ 11 на 22 и т. д.

Въ горизонтальномъ направленіи провѣряются легко первыя двѣ цифры группъ. Такъ напр. разсмотримъ строчку (12). Мы видимъ, что 44 повторяется до тѣхъ поръ, пока возрастаетъ стоящая послѣ него часть. Въ томъ мѣстѣ, гдѣ эта часть вмѣсто возрастанія убавилась (а именно послѣ 96 оказалось 20), 44 обратилось въ 45.

Это 45 повторяется до того мѣста, гдѣ послѣ 92 оказалось 16. Такъ 45 перешло въ 46.

Начиная съ 50-ой строки первыя двѣ цифры возрастаютъ на 1-цу, пока слѣдующая послѣ нихъ часть возрастаетъ, и увеличиваются на 2 единицы, если происходитъ ея убавленіе.

Кромѣ того есть еще иные столь же простые способы повѣрки. И до отпечатанія и послѣ отпечатанія таблицы наши были повѣрены десятками лицъ. Мы можемъ съ увѣренностью рекомендовать ихъ астрономамъ и инженерамъ. Въ нихъ нѣтъ *ни одной* ошибки *) Каждый легко можетъ въ этомъ убѣдиться, просмотрѣвъ любой столбецъ, или любую строчку.

19. Результатомъ дѣйствія надъ числами, какъ извѣстно, можетъ быть или соизмѣримое число или несоизмѣримое. Строгость науки требуетъ, чтобы въ первомъ случаѣ мы имѣли возможность получить число *совершенно точно*, во второмъ, *какъ угодно точно*. Къ сожалѣнію это признается только въ теоріи, а не на практикѣ.

Такъ, напр., въ извѣстной задачѣ, число зеренъ есть $2^{64} - 1$; находимъ при помощи логариѳмовъ, что зеренъ было

$$18446700000000000000.$$

Здѣсь нули столь же вѣрны, какъ и любыя цифры, которыя мы поставили бы вмѣсто нихъ.

Самая форма результата ясно показываетъ, что способъ рѣшенія не вполнѣ пригоденъ для вопроса.

Мы покажемъ, что таблица квадратовъ вмѣстѣ съ таблицей дѣлителей и остатковъ, въ случаѣ соизмѣримаго результата, такъ же важна и незамѣнима, какъ таблица логариѳмовъ въ случаѣ результата несоизмѣримаго **).

---

*) Мы говоримъ это только о печатныхъ таблицахъ квадратовъ. Литографскій способъ, которымъ изданы таблицы дѣлителей, не допускалъ такой строгой провѣрки. Тѣмъ не менѣе и въ остальныхъ таблицахъ число погрѣшностей ничтожно.

**) Въ 51-омъ томѣ журнала Crelle'я редакторъ указываетъ на то, какъ важно было бы составленіе таблицы дѣлителей, доведенной до большаго числа. Прося правительства разныхъ государствъ дать средства для этого, онъ указываетъ способы, которыми въ 3 года таблица можетъ быть доведена до семи милліоновъ и въ 16-ть лѣтъ до 30 милліоновъ. Способы, указанные въ журналѣ, не геометрическіе. Таблицы представляли бы десятки тысячъ страницъ при весьма большой продажной цѣнѣ.

Наша таблица остатковъ, основанная на геометрическомъ методѣ, состоитъ только изъ 6 страницъ, таблица дѣлителей изъ 12-ти. Обѣ вмѣстѣ позволяютъ

20. Покажемъ, какъ при помощи таблицы квадратовъ можно легко возвышать числа въ какую угодно цѣлую степень.

Пусть требуется возвысить 19 въ 7-ую степень. Можно написать $19^7=19^6 . 19=(19^3)^2 . 19$.

$$\text{Но } 19^3=19^2 . 19.$$

Въ таблицѣ находимъ на 1 стран. $19^2=361$.

Умножая на 19, получаемъ 6859.

Возвышаемъ въ квадратъ по таблицѣ (стран. XIII).

$$6859^2=47045881.$$

Умноживъ это число на 19, получимъ.

$$19^7=893871739.$$

Извлеченіе корня въ томъ случаѣ, когда корень извлекается нацѣло, совершается при помощи таблицы квадратовъ и ранѣе разсмотрѣнныхъ таблицъ.

$$\text{Найти } \sqrt[3]{146483 . 423613}.$$

Такого рода вопросы обыкновенно рѣшаютъ съ помощью логариѳмовъ.

При этомъ по результату судить о томъ, извлекомый ли намъ данъ корень или нѣтъ, нельзя, о величинѣ ошибки можно судить только гадательно, пріискиваніе логариѳмовъ требуетъ довольно много времени.

Итакъ, прежде, чѣмъ примѣнять логариѳмы, попробуемъ одно изъ данныхъ чиселъ, напр., первое, разложить на множители.

При помощи таблицъ дѣлителей и остатковъ найдемъ, что оно дѣлится на 37. Раздѣливъ, получимъ 3959. Найдя это число въ таблицѣ дѣлителей, видимъ, что оно дѣлится на 37. Раздѣливъ, получимъ 107. Итакъ, первый множитель есть $37^2 . 107$. Если кубическій корень извлекается нацѣло, то второй множитель долженъ содержать $107^2 . 37$.

По таблицѣ квадретовъ получимъ $107^2=11449$. Умноживъ это число на 37, получимъ 423613. Итакъ подкоренная величина есть

въ нѣсколько минутъ опредѣлить двузначныхъ дѣлителей, если они есть, любаго числа до ста милліоновъ. Способъ нахожденія остальныхъ дѣлителей, основанный на таблицѣ квадратовъ, будетъ указанъ для чиселъ до милліона,—въ этой главѣ, для большихъ чиселъ во второй части нашего труда.

37^3. 107. 107^2. 37 и потому кубическій корень изъ нея есть 107. 37. Мы уже видѣли, что это число есть 3959. Это и есть отвѣтъ на вопросъ.

Рѣшеніе такимъ способомъ требуетъ меньше времени, чѣмъ посредствомъ логариѳмовъ, и даетъ результатъ точный вмѣсто неточнаго. Этотъ способъ примѣнимъ *безусловно всегда*, когда корень извлекомъ.

21. Покажемъ еще, какъ можно извлекать при помощи таблицъ квадратные корни изъ чиселъ точно и съ приближеніемъ.

Найти $\sqrt{4124961}$.

Раздѣливъ число на грени по двѣ цифры справа, ищемъ первую грань (4) во второмъ столбцѣ первой страницы и идемъ вправо по той горизонтальной строкѣ, на которой послѣ 4 стоитъ грань, не превышающая 12. Въ нашемъ случаѣ идемъ вправо по строкѣ 20. На III стран. найдемъ, что подкоренная величина есть квадратъ 2031-го.

Найти $\sqrt{2246}$ съ точностью до 5 десятичныхъ знаковъ.

Добавивъ четыре нуля, получимъ 22,46,00,00.

Первую грань ищемъ на 1-й страницѣ. Видимъ, что надобно идти вправо по строкѣ (47) На стран. IV останавливаемся на ближайшемъ къ данному меньшемъ числѣ, подписываемъ его подъ даннымъ и справа пишемъ то число, для котораго оно служитъ квадратомъ. Затѣмъ вычитаемъ и приписываемъ остальные 6 нулей.

$$\begin{array}{ll} 22460000 & 4739 \\ \underline{22458121} & \\ \quad 1879000000. & \end{array}$$

Этотъ остатокъ дѣлимъ на удвоенную найденную часть, т. е на 4739000. 2 или на 9478000.

Иначе говоря, можно дѣлить 1879000 на 9478. Получимъ остающіяся три цифры 198.

Затѣмъ, такъ какъ мы приписали 10 нулей, то въ числѣ 4739198 мы должны отдѣлить справа 5 знаковъ.

$$\sqrt{2246} - 47,39198.$$

При помощи таблицы квадратовъ можно весьма легко вычислять периметръ превильнаго многоугольника съ весьма большимъ числомъ сторонъ, слѣдовательно и получить число π съ точностью, значи-

тельно превышающею точность Архимедова числа 3,14. Извѣстно, какъ шатко бываетъ представленіе о числѣ π у тѣхъ, которые не получали сами его на практикѣ, а между тѣмъ вычисленіе его безъ таблицъ требуетъ, по крайней мѣрѣ, двухъ часовъ времени и, къ сожалѣнію, многіе преподаватели рѣшаются скорѣе оставить неяснымъ пониманіе столь важнаго числа, чѣмъ затратить такое время.

Трехзначныя таблицы квадратовъ, какъ легко убѣдиться, даютъ такую малую точность, что совершенно негодны для этой цѣли.

22. Укажемъ еще одно весьма важное приложеніе таблицъ.

Всѣмъ извѣстны тѣ пробѣлы, которые являются въ алгебрѣ при изученіи прогрессій. Послѣ того, какъ изслѣдована ариѳметическая прогрессія сполна, большинство вопросовъ, относящихся до геометрической или отлагаются до ознакомленія съ логариѳмами или относятся къ вопросамъ, совсѣмъ не разрѣшаемымъ въ элементарной алгебрѣ въ виду того, что сводятся къ рѣшенію уравненій высшихъ степеней.

Мы покажемъ, что въ случаѣ соизмѣримыхъ чиселъ эти вопросы всегда рѣшаются и при томъ легко и точно.

1. Найти двадцатый членъ прогрессіи.

$$\because 8, 24, 72,$$

Какъ извѣстно, онъ равенъ 8.3^{19}.

Возводя 3 въ 4-ю степень, получимъ 81.

Квадратъ 81-го по таблицѣ равенъ 6561.

Это есть 3^8. Квадратъ 6561-го по таблицѣ равенъ 43046721. Это есть 3^{16}.

Остается умножить это число на 27.8 или на 216.

2. Первый членъ геометрической прогрессіи равенъ 8, знаменатель 7, сумма ревна 53804808. Найти число членовъ.

Называя искомое число черезъ x, будемъ имѣть.

$$8.\frac{(7^x-1)}{6}=53804808,$$

$$\text{а отсюда } 7^x=40353607.$$

При рѣшеніи вопросовъ подобныхъ данному важно знать слѣдующее:

Каждое число, возведенное въ какую-нибудь степень, не дѣлящуюся на 4, оканчивается на ту же цифру, какъ это число, возведенное въ степень остатка при дѣленіи показателя на 4. Напр. 3^{11}

оканчивается на ту же цифру, какъ 3^3, т. е. на 7; 4^5 оканчивается той же цифрой какъ 4^1, т. е. чотырьмя.

Приложимъ эту теорему къ нашему вопросу. 7^1 оканчивается на 7, 7^2 на 9, 7^3 на 3. Итакъ остатокъ при дѣленіи x на 4 долженъ быть 1. Слѣд. x можетъ быть 1, 5, 9 и т. д.

По таблицѣ квадратовъ находимъ

$$7^4 = 2401 \quad 7^8 = 5764801.$$

Умножая на 7 получимъ $7^9 = 40353607$. Откуда слѣдуетъ, что число членовъ есть 9

3. По первому члену прогрессіи a, числу членовъ n и суммѣ ея s найти знаменатель.

Означивъ его черезъ x, будемъ имѣть

$$a\ \frac{(x^n-1)}{x-1} = s.$$

Здѣсь можетъ быть два случая: s при раздѣленіи на a даетъ цѣлое число или же даетъ дробное число. Въ первомъ случаѣ знаменатель прогрессіи есть цѣлое число; во второмъ дробное.

Разсмотримъ первый случай. Назовемъ $\frac{s}{a}$ черезъ A. Будемъ имѣть.

$$\frac{x^n-1}{x-1} = A.$$

Если n четное, то x^n-1 можно разложить на нѣсколько множителей. Напр.

$$x^6-1=(x^3-1)(x^3+1) = (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1).$$

A нужно также разложить на множители.

Примѣръ.

Первый членъ прогрессіи равенъ 11, число членовъ равно 6, сумма равна

6371145

Раздѣливъ 6371145 на 11 будемъ имѣть.

$$\frac{x^6-1}{x-1} = 579195.$$

Или $(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1) = 3.3.5.61.211$.

x не можетъ быть нечетнымъ числомъ, такъ какъ иначе первый множитель былъ бы четнымъ, а между тѣмъ вторая часть не дѣлится на 2.

x не есть 2, потому что $\frac{2^6-1}{2-1}=63$.

x не есть 4, потому что 4^2-4+1 равно 13, а вторая часть не дѣлится на 13.

x не есть 6, потому что $6+1=7$; а вторая часть на 7 не дѣлится.

Точно также убѣдимся, что если бы x равнялся 8, 10, 12, то вторая часть должна была бы дѣлиться на 19, 11, 13.

Полагая $x=14$ будемъ имѣть.

$$14+1=15,\ 196-14+1=183=3.61.$$
$$196+14+1=211.$$

Такъ какъ всѣ эти множители въ точности даютъ вторую часть, то заключаемъ что $x=14$.

Предложимъ другой способъ рѣшенія того же вопроса, одинаково пригодный при n четномъ и нечетномъ.

Изъ уравненія $\frac{x^n-1}{x-1}=A$ имѣемъ.

$$x.\ (A-x^{n-1})=A-1.$$

Разложивъ $A-1$ на множители, будемъ имѣть, что x долженъ равняться одному изъ меньшихъ множителей, а $A-x^{n-1}$ одному изъ большихъ.

Рѣшимъ ту же задачу. Получимъ.

$$x.\ (579195-x^5)=579194.$$

Разложивъ 579194 на множители, найдемъ 2.7.41371.

Еслибы x ревнялся 2, то второй множитель 1-ой части кончался бы на 3, а произведеніе обоихъ на 6. Между тѣмъ оно кончается на 4.

Посмотримъ, можетъ ли x равняться 7. 7^5 кончается на ту же цифру, какъ 7^1, т. е. на 7 и потому второй множитель долженъ былъ бы имѣть послѣдней цифрой 8. Произведеніе обоихъ кончалось бы на 6, а оно должно оканчиваться на 4.

Посмотримъ, можетъ ли x ревняться 14. 14^5 оканчивается на 4, слѣд. второй множитель на 1; преизведеніе обоихъ на 4. Итакъ предположеніе $x=14$ не ведетъ къ противорѣчію.

$14^2=196$. 196^2 по таблицѣ равно 38416. Умноживъ это число на 14, получимъ $14^5=537824$.

Вычитая это число изъ 579195, получимъ 41371. Итакъ $x=14$.

Теперь разсмотримъ тотъ случай, когда $\frac{s}{a}$ равно нѣкоторой не-

сократимой дроби $\frac{b}{c}$. Въ этомъ случаѣ пусть $x = \frac{p}{q}$ (гдѣ p и q не имѣютъ общ. множит.) и слѣд. $\frac{p^n - q^n}{(p-q)\,q^{n-1}} = \frac{b}{c}$.

$$\text{Здѣсь } q^{n-1} = c \text{ и } \frac{p^n - q^n}{p-q} = b$$

Опредѣляемъ сначала q; затѣмъ находимъ p посредствомъ разложенія $p^n - q^n$ и b.

23. Теперь перейдемъ къ вопросу, спеціально относящемуся къ нашему сочиненію,—къ разложенію числа на множители посредствомъ таблицы квадратовъ. При этомъ мы будемъ имѣть въ виду только *нечетныя* числа.

Всякое число можетъ быть разложено на два неравныхъ множителя. Если возьмемъ полусумму ихъ и полуразность, и вычтемъ изъ первой вторую, то получимъ данное число

Примѣры:

$$63 = 9.7 \quad \frac{9+7}{2} = 8 \quad \frac{9-7}{2} = 1 \quad 63 = 8^2 - 1^2,$$

$$27 = 9.3 \quad \frac{9+3}{2} = 6 \quad \frac{9-3}{2} = 3 \quad 27 = 6^2 - 3^2.$$

Простое число и квадратъ простаго числа могутъ быть разложены на 2 неравныхъ множителя только однимъ способомъ; поэтому и въ видѣ разности двухъ квадратовъ эти числа представляются только однимъ способомъ.

$$7 = 7.1 \quad \frac{7+1}{2} = 4 \quad \frac{7-1}{2} = 3 \quad 7 = 4^2 - 3^2$$

$$7^2 = 49.1 \quad \frac{49+1}{2} = 25 \quad \frac{49-1}{2} = 24 \quad 49 = 25^2 - 24^2$$

Прочія числа могутъ быть разложены на неравные множители болѣе, чѣмъ однимъ способомъ, а потому и представлены въ видѣ разности двухъ квадратовъ могутъ быть также болѣе, чѣмъ однимъ способомъ.

$$21 = 21.1 = 3.7 = 11^2 - 10^2 = 5^2 - 2^2$$

Мы видимъ, что два вопроса. разложить числа на множители и представить его въ видѣ разности двухъ квадратовъ сводится одинъ къ другому.

24. Если мы нашли квадратъ какого-нибудь числа, то для полученія

квадрата слѣдующаго числа нужно данное удвоить, затѣмъ прибавить 1-цу и эту сумму приложить къ данному. Послѣ того для полученія слѣдующихъ квадретовъ нужно прибавляемыя числа увеличивать на 2 единицы.

Примѣръ.

$$\begin{array}{r} 289 = 17^2 \\ +\ 35 \\ \hline 324 = 18^2 \\ +\ 37 \\ \hline 361 = 19^2 \end{array}$$ и т. д.

Положимъ, что требуется разложить на множители число 18419. Найдемъ въ таблицѣ ближайшій большій квадратъ. Это будетъ

$$18496 = 136^2$$

Слѣдующій квадратъ больше на $2.136 + 1$ т. е. на 273; затѣмъ третій больше втораго на 275 и т. д.

Вычтемъ данное число изъ 18496 и къ разности послѣдовательно прибавимъ 273, 275 и т. д.

$$\begin{array}{r} 18496 \\ -\ 18419 \\ \hline 77 \\ +\ 273 \\ \hline 350 \\ +\ 275 \\ \hline 625 \end{array}$$ и т. д.

Итакъ, прибавляя къ данному числу 77, получаемъ квадратъ 136-ти; прибавляя къ данному числу 350, получимъ квадратъ 137; прибавляя 625, получимъ квадратъ 138 и т. д.

Для насъ важна та изъ разностей, которая есть точный квадратъ. Какъ скоро мы достигли такой разности, то мы рѣшили вопросъ о представленіи даннаго числа въ видѣ разности квадратовъ.

Въ нашемъ примѣрѣ $625 = 25^2$. Слѣд. $18419 + 25^2 = 138^2$, откуда

$$18419 = 138^2 - 25^2 = 163.113$$

Мы видимъ, что способъ этотъ основывается на рѣшеніи вопроса о томъ, какая изъ разностей есть точный квадратъ. Вопросъ этотъ рѣшается по таблицѣ квадратовъ.

При этомъ не каждую разность нужно пріискивать въ таблицѣ, а лишь немногія въ нихъ.

Возьмемъ первые четыре квадрата 1, 4, 9, 16. Прибавляя по 20 нѣсколько разъ и приставивъ по нулю передъ 1, 4 и 9-ью, получимъ слѣдующую таблицу

01	04	09	16
21	24	29	36
41	44	49	56
61	64	69	76
81	84	89	96

Если присоединимъ сюда пары цифръ 00 и 25, то получимъ всего 22 пары цифръ, которыя мы будемъ называть квадратными окончаніями. Только на нихъ могутъ кончаться полные квадраты.

Примѣръ.

Разложить на множители число 27641. На стран. VI находимъ ближайшій большій квадратъ

$$\begin{array}{r} 27889 = 167^2 \\ -\,27641 \\ \hline 248 \\ +\,335 \\ \hline 583 \\ +\,337 \\ \hline 920 \\ +\,339 \\ \hline 1259 \\ +\,341 \\ \hline 1600 \end{array}$$

Разности 248, 583, 920, 1259 не нужно пріискивать въ таблицѣ, такъ какъ онѣ не имѣютъ квадратныхъ окончаній. 1600 есть точный квадратъ.

Такъ какъ мы дошли до разности, которая есть точный квадретъ, то на ней и останавливаемся. Для повѣрки вычисленія прибавляемъ ее къ данному числу

$$\begin{array}{r} 1600 \\ +\,27641 \\ \hline 29241 \end{array}$$

Эта сумма непремѣнно должна найтись въ таблицѣ квадратовъ. Дѣйствительно, мы видимъ, что она равна квадрату 171.

Итакъ $27641 = 171^2 - 40^2$
и слѣд $27641 = 211.131$

25. Указанный способъ самъ собою приводитъ къ слѣдующимъ вопросамъ.

1) Сколько нужно получить разностей, чтобы дойти или до разложенія даннаго числа на множители или до утвердительнаго отвѣта, что данное число простое.

2) Что нужно сдѣлать, чтобы, пропуская тѣ разности, которыя не суть полные квадраты, возможно легче находить тѣ, которыя могутъ быть полными квадратами.

Займемся первымъ вопросомъ. Прежде всего замѣтимъ слѣдующее: сумма послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ, начинающихся съ 1-цы, всегда равна квадрату ихъ числа. Напр.

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

Сумма чиселъ, увеличивающихся на 2, равна первому изъ нихъ безъ 1-цы, умноженному на число ихъ, и сложенному съ квадратомъ числа ихъ. Напр., $65 + 67 + 69 + 71 + 73 = 64.5 + 5^2$.

Въ предыдущей задачѣ мы къ 248 прибавили четыре числа 335, 337, 339, 341. Сумма ихъ равна $334.4 + 4^2$. Эта сумма вмѣстѣ съ 248 составила точный квадратъ 1600

$$167^2 - 27641 + 2.167.4 + 4^2 = 1600$$

Изслѣдуемъ этотъ вопросъ въ общемъ видѣ. Намъ дано число a Мы нашли по таблицѣ, что ближайшій къ нему большій квадратъ есть квадратъ числа b. Къ разности $b^2 - a$ прибавляемъ $2b + 1$, $2b + 3$ и т. д. всего y разностей. Слѣд. мы прибавляемъ величину.

$$2b.y + y^2$$

Полученное число $b^2 - a + 2by + y^2$ есть полный квадратъ.

Можно написать тожество

$$a = (b + y)^2 - \left(\sqrt{(b + y)^2 - a}\right)^2$$

Разлагая на множители будемъ имѣть

$$a = \left(b + y + \sqrt{(b + y)^2 - a}\right)\left(b + y - \sqrt{(b + y)^2 - a}\right)$$

При помощи таблицы остатковъ мы легко можемъ выдѣлить изъ всякаго даннаго числа множители, меньшіе 100. Итакъ мы будемъ разсматривать только тотъ случай, когда меньшій множитель числа a больше ста. Будемъ имѣть

$$b + y - \sqrt{(b+y)^2 - a} > 100$$

или

$$b + y - 100 > \sqrt{(b+y)^2 - a}.$$

отсюда получимъ

$$y < 50 + \frac{a}{200} - b$$

Такимъ образомъ, напр., если число меньше 25600, то

$$y < 50 + 128 - 160 \text{ или } y < 18$$

Итакъ, если при изслѣдованіи числа, меньшаго 25600, между 18-ью полученными разностями ни одна не есть точный квадратъ, то это число простое.

При этомъ необходимо знать, что число не содержитъ множителя меньше 100.

Предъидущая формула обобщается для какого угодно предѣла.

Выводъ остается одинаковъ, если мы вмѣсто 100 возьмемъ иной предѣлъ m. Если мы увѣрены, что меньшій множитель даннаго числа a больше m, то число разностей, которыя нужно изслѣдовать меньше, чѣмъ

$$\frac{m}{2} + \frac{a}{2 . m} - b$$

гдѣ b есть корень изъ бóльшаго ближайшаго квадрата къ a.

26. Переходимъ ко второму вопросу.

Если мы будемъ къ какому нибудь числу прибавлять числа возрастающія на 2, то замѣтимъ, что всѣхъ различныхъ паръ цифръ, служащихъ окончаніями, будетъ не болѣе 22 и что онѣ будутъ повторяться въ опредѣленномъ порядкѣ.

На приложенной таблицѣ (A) въ первомъ столбцѣ помѣщены послѣднія 2 цифры квадратовъ 0, 1-цы, 2, 3 и т. д. до 25.

Затѣмъ въ слѣдующихъ столбцахъ идутъ числа, полученныя изъ предшествующихъ прибавленіемъ 1-цы.

Эта таблица значительно сокращаетъ рѣшеніе вопроса.

Примѣръ. Разложить на множители число 62957.

Поступая по предъидущему, будетъ имѣть

$$\begin{array}{r} 63001 = 251^2 \\ -\ 62957 \\ \hline 44 \end{array}$$

Къ 44 нужно прибавить 503, затѣмъ 505 и т. д. Выполняя это, мы будемъ получать, какъ не трудно убѣдиться, числа, имѣющія окончанія, находящіяся въ 43-емъ вертикальномъ столбцѣ, а именно, послѣ 44 будетъ 47, потомъ 52 и т. д. Всѣ эти числа намъ не нужны, но нужна 8-ая разность, кончающаяся на 24.

Чтобы получить ее, мы должны къ 44-мъ придать $502.8 + 8^2$ или 4080. Получимъ

$$\begin{array}{r} 44 \\ +\ 4080 \\ \hline 4124 \end{array} \quad (259)$$

Если 4124 придадимъ къ данному числу 62957, то получимъ квадратъ 259. Это можно повѣрить по таблицѣ.

Слѣдующая разность кончается на 43 и потому не нужна. Намъ нужна вторая разность, кончающаяся на 64. Чтобы получить ее, нужно къ 4124 прибавить $2.259.2 + 2^2$ или 1040

$$\begin{array}{r} 4124 \\ +\ 1040 \\ \hline 5164 \end{array} \quad (261)$$

Послѣ этой мы должны получить 8-ую, кончающуюся на 04. Къ 5164 мы должны прибавить $261.2.8 + 8^2$ или 4240

$$\begin{array}{r} 5164 \\ +\ 4290 \\ \hline 9404 \end{array} \quad (269)$$

Слѣдующая разность будетъ оканчиваться на 84 и соотвѣтствовать квадрату (271); потомъ послѣ нея разности будутъ идти такъ,

27, 72, 19, 68, 19, 72, 27, 84

т. е. окончанія, дойдя до низу, возвращаются назадъ.

Всматриваясь въ полученные результаты можно замѣтить весьма существенное упрощеніе процесса вычисленія.

Достаточно получить только двѣ разности съ квадратными окончаніями. Отъ нихъ мы можемъ идти черезъ 10 и при этомъ пройдемъ черезъ всѣ нужныя разности.

Мы имѣли слѣдующія разности: 44, соотвѣтствующую 251^2, и 4124, соотвѣтствующую 259^2.

Сдѣлавъ отъ 1-ой 10 переходовъ, должны будемъ прибавить $502.10+10^2$ или 5120. Получимъ разность, соотвѣтствующую числу 261^2. Для новыхъ 10 переходовъ нужно прибавить $522.10+100$ или 5320, т. е. на 200 больше.

То же самое имѣетъ мѣсто и для разности 4124.

Итакъ все вычисленіе состоитъ въ слѣдующимъ

44	(251)	4124	(259)
+ 5120		+ 5280	
5164	(261)	9404	(269)
+ 5320		+ 5480	
10484	(271)	14884	(279)

По таблицѣ квадратовъ мы замѣчаемъ, что $14884 = 122^2$. Итакъ $62957 = 279^2 - 122^2 = 401.157$.

Каждая новая разность, которую мы получаемъ, расширяетъ тѣ предѣлы, между которыми нѣтъ дѣлителей даннаго числа. Такъ, напр., получивъ разность 10484, соотвѣтствующую числу 271, мы могли бы сказать, что данное число не имѣетъ дѣлителей, между $271+\sqrt{10484}$ и $271-\sqrt{10484}$ или иначе между 373 и 169. Слѣд. меньшій дѣлитель, если число не простое, заключается между 169 и 100.

Другой примѣръ.

Найти дѣлителей числа 157439.

$$
\begin{array}{rl}
157609 = 397^2 & \\
157439 & \\
\hline
170 & \\
+\ 795 & \\
\hline
965 & (398) \\
+\ 797 & \\
\hline
1762 & (399) \\
799 & \\
\hline
2561 & (400)
\end{array}
$$

До этого мѣста въ таблицѣ окончанія идутъ по столбцу (61) вверхъ. Отъ этого мѣста нужно спуститься на 8 переходовъ до окончанія 25. Итакъ нужно прибавить $400.2.8 + 8^2$ или 6464; получимъ число 9025 соотвѣтствующее квадрату 408. По таблицѣ квадретовъ замѣтимъ, что это есть квадратъ 95. Итакъ

$$157439 = 408^2 - 95^2 = 503.313$$

27. Способъ, указанный нами ведетъ весьма быстро къ цѣли, если оба множителя не особенно много отличаются одинъ отъ другаго. Но и въ другихъ случаяхъ онъ весьма удобенъ при нѣкоторомъ видоизмѣненіи.

Пусть намъ дано число 91657. Прежде всего по таблицѣ остатковъ смотримъ, есть ли въ немъ дѣлители меньше 100. Убѣждаемся что ихъ нѣтъ. Спрашивается, сколько нужно будетъ брать разностей, чтобы окончить изслѣдованіе.

Принимая это число для простоты за 90000 и слѣд. b за 300 будемъ имѣть

$$y < 50 + 450 - 300 \text{ или } y < 200.$$

Такъ какъ одинъ изъ двухъ множителей всегда больше квадратнаго корня изъ числа, то здѣсь мы имѣемъ, что одинъ множитель больше 300, а другой больше 100.

Умножимъ данное число на 3. Получимъ 274971. Это число имѣетъ двухъ множителей, которые оба больше 300. Корень изъ него приблизительно равенъ 524. Прилагая формулу, получимъ

$$y < \frac{300}{2} + \frac{274971}{300.2} - 524$$
$$\text{или } y < 150 + 458 - 524$$
$$y < 84.$$

Итакъ подвинувшись менѣе, чѣмъ на 84 единицы, мы разложимъ это число на множители, или убѣдимся, что оно простое.

28. Такъ какъ каждая новая разность съуживаетъ предѣлы, между которыми могутъ заключаться дѣлители даннаго числа, то смотря потому, что намъ кажется проще, мы можемъ или продолжать полученіе разностей или испробовать остающихся возможныхъ дѣлителей.

Въ одномъ извѣстномъ задачникѣ предлагается задача, которая обыкновенно стоитъ многихъ безплодно потерянныхъ часовъ, такъ какъ окончательное ея рѣшеніе указаннымъ въ Ариѳметикѣ способомъ требуетъ дѣленія на всѣ простыя числа до 211.

Узнать, простое или составное число 49523.

При помощи таблицы квадратовъ имѣемъ:

$$\begin{array}{rl} 49729 & = 223^2 \\ 49523 & \\ \hline 206 & \\ +\ 447 & \\ \hline 653 & (224) \end{array}$$

По таблицѣ (А) въ строкѣ соотвѣтствующей разности 47, придаваемой къ 06, находимъ (въ столбцѣ 77), что послѣ 53 идутъ слѣдующія окончанія: сначала внизъ 02, и потомъ назадъ вверхъ 53, 06, 61.

Итакъ къ 653 надобно прибавить 4 разности т.-е. $224.2.2+4^2$ или 1808.

$$\begin{array}{rl} 653 & \\ +\ 1808 & \\ \hline 2461 & (228) \end{array}$$

Затѣмъ опять 4 разности, т. е. 228.2.4+16.

$$\begin{array}{rl} 2461 & \\ 1840 & \\ \hline 4301 & (232) \end{array}$$

Отъ этихъ разностей 2461 и 4301 идемъ черезъ 10.

$$\begin{array}{rl} 2461 & (228) \\ +\ 4660 & \\ \hline 7121 & (238) \\ +\ 4860 & \\ \hline 11981 & (246) \\ 5060 & \\ \hline 17041 & (258) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 4301 & (232) \\ +\ 4740 & \\ \hline 9041 & (242) \\ +\ 4940 & \\ \hline 13981 & (252) \\ +\ 5140 & \\ \hline 19121 & (262) \end{array}$$

Остановимся на этомъ результатѣ. Для повѣрки вычисленія къ послѣднимъ числамъ придадимъ данное 49523 По таблицѣ квадратовъ видимъ, что получимъ дѣйствительно 258^2 и 262^2.

Ни одна изъ полученныхъ разностей не есть полный квадратъ слѣд. данное число не имѣетъ дѣлителей между $262+\sqrt{19121}$ и $262-\sqrt{19121}$ или иначе между 400 и 124. Если оно составное, то одинъ его дѣлитель долженъ заключаться между 124 и 100, слѣд.

онъ можетъ быть однимъ изъ чиселъ 101, 103, 107, 109 и 113. Испробовавъ этихъ дѣлителей приходимъ къ заключенію что данное число простое.

29. Разложеніе чиселъ, превышающихъ милліонъ и неимѣющихъ дѣлителей, меньшихъ ста, требуетъ особыхъ приспособленія. Изслѣдованіе это мы откладываемъ до 2-ой части нашего труда.

Вторая часть будетъ имѣть предметомъ геометрическія свойства различныхъ кривыхъ, связанныхъ съ таблицей дѣлителей.

Кромѣ того мы покажемъ въ ней, какъ съ помощью тѣхъ же, ранѣе разсмотрѣнныхъ нами таблицъ, рѣшается другой, весьма важный вопросъ теоріи чиселъ вопросъ о квадратичныхъ формахъ.

Числа, стоящія слѣва въ таблицѣ окончаній, помѣщены именно съ тѣмъ, чтобы эта таблица, вмѣстѣ съ таблицей квадратовъ, давала бы рѣшеніе только что названнаго нами вопроса.

Примѣры на первыя 4 главы.

1. Перемножить дроби, разложивъ предварительно ихъ члены на множители и сокративъ.

$$\frac{1219}{1189}, \frac{899}{1357}, \frac{3599}{1643}, \frac{205}{671}.$$

1. Узнать, на что сокращается дробь $\frac{101491}{999999}$

3. Дроби $\frac{17}{53}$, $\frac{69}{73}$, $\frac{81}{97}$ при обращеніи въ десятичныя съ точностью до 8 десятичныхъ знаковъ дали остатки 37. 69 и 62. Повѣрить вычисленіе съ помощью таблицы остатковъ.

4. Разложить на множители числа 5000021; 655707

5. Первый членъ геометрической прогрессіи 13, число членовъ 6, сумма ихъ 254904. Найти знаменатель

6. Найти $\sqrt[3]{285779.\ 37173253}$, не производя перемноженія подъ корнемъ.

7. Разложить на множители по способу квадратовъ числа 48391; 218299.

Дозволено цензурою. Москва, 13 апрѣля 1885 г.

Типографія А. И. Мамонтова и К°, Леонтьевскій пер., № 5

		00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
		00	01	04	09	16	25	36	49	64	81	00	21	44
1		100	102	104	106	108	110	112	114	116	118	121	123	125
2		400	404	408	412	416	420	424	428	432	436	441	445	449
3		900	906	912	918	924	930	936	942	948	954	961	967	973
4		1600	1608	1616	1624	1632	1640	1648	1656	1664	1672	1681	1689	1697
5		2500	2510	2520	2530	2540	2550	2560	2570	2580	2590	2601	2611	2621
6		3600	3612	3624	3636	3648	3660	3672	3684	3696	3708	3721	3733	3745
7		4900	4914	4928	4942	4956	4970	4984	4998	5012	5026	5041	5055	5069
8		6400	6416	6432	6448	6464	6480	6496	6512	6528	6544	6561	6577	6593
9		8100	8118	8136	8154	8172	8190	8208	8226	8244	8262	8281	8299	8317
10	1	0000	0020	0040	0060	0080	0100	0120	0140	0160	0180	0201	0221	0241
11	1	2100	2122	2144	2166	2188	2210	2232	2254	2276	2298	2321	2343	2365
12	1	4400	4424	4448	4472	4496	4520	4544	4568	4592	4616	4641	4665	4689
13	1	6900	6926	6952	6978	7004	7030	7056	7082	7108	7134	7161	7187	7213
14	1	9600	9628	9656	9684	9712	9740	9768	9796	9824	9852	9881	9909	9937
15	2	2500	2530	2560	2590	2620	2650	2680	2710	2740	2770	2801	2831	2861
16	2	5600	5632	5664	5696	5728	5760	5792	5824	5856	5888	5921	5953	5985
17	2	8900	8934	8968	9002	9036	9070	9104	9138	9172	9206	9241	9275	9309
18	3	2400	2436	2472	2508	2544	2580	2616	2652	2688	2724	2761	2797	2833
19	3	6100	6138	6176	6214	6252	6290	6328	6366	6404	6442	6481	6519	6557
20	4	0000	0040	0080	0120	0160	0200	0240	0280	0320	0360	0401	0441	0481
21	4	4100	4142	4184	4226	4268	4310	4352	4394	4436	4478	4521	4563	4605
22	4	8400	8444	8488	8532	8576	8620	8664	8708	8752	8796	8841	8885	8929
23	5	2900	2946	2992	3038	3084	3130	3176	3222	3268	3314	3361	3407	3453
24	5	7600	7648	7696	7744	7792	7840	7888	7936	7984	8032	8081	8129	8177
25	6	2500	2550	2600	2650	2700	2750	2800	2850	2900	2950	3001	3051	3101
26	6	7600	7652	7704	7756	7808	7860	7912	7964	8016	8068	8121	8173	8225
27	7	2900	2954	3008	3062	3116	3170	3224	3278	3332	3386	3441	3495	3549
28	7	8400	8456	8512	8568	8624	8680	8736	8792	8848	8904	8961	9017	9073
29	8	4100	4158	4216	4274	4332	4390	4448	4506	4564	4622	4681	4739	4797
30	9	0000	0060	0120	0180	0240	0300	0360	0420	0480	0540	0601	0661	0721
31	9	6100	6162	6224	6286	6348	6410	6472	6534	6596	6658	6721	6783	6845
32	10	2400	2464	2528	2592	2656	2720	2784	2848	2912	2976	3041	3105	3169
33	10	8900	8966	9032	9098	9164	9230	9296	9362	9428	9494	9561	9627	9693
34	11	5600	5668	5736	5804	5872	5940	6008	6076	6144	6212	6281	6349	6417
35	12	2500	2570	2640	2710	2780	2850	2920	2990	3060	3130	3201	3271	3341
36	12	9600	9672	9744	9816	9888	9960	*0032	*0104	*0176	*0248	*0321	*0393	*0465
37	13	6900	6974	7048	7122	7196	7270	7344	7418	7492	7566	7641	7715	7789
38	14	4400	4476	4552	4628	4704	4780	4856	4932	5008	5084	5161	5237	5313
39	15	2100	2178	2256	2334	2412	2490	2568	2646	2724	2802	2881	2959	3037
40	16	0000	0080	0160	0240	0320	0400	0480	0560	0640	0720	0801	0881	0961
41	16	8100	8182	8264	8346	8428	8510	8592	8674	8756	8838	8921	9003	9085
42	17	6400	6484	6568	6652	6736	6820	6904	6988	7072	7156	7241	7325	7409
43	18	4900	4986	5072	5158	5244	5330	5416	5502	5588	5674	5761	5847	5933
44	19	3600	3688	3776	3864	3952	4040	4128	4216	4304	4392	4481	4569	4657
45	20	2500	2590	2680	2770	2860	2950	3040	3130	3220	3310	3401	3491	3581
46	21	1600	1692	1784	1876	1968	2060	2152	2244	2336	2428	2521	2613	2705
47	22	0900	0994	1088	1182	1276	1370	1464	1558	1652	1746	1841	1935	2029
48	23	0400	0496	0592	0688	0784	0880	0976	1072	1168	1264	1361	1457	1553
49	24	0100	0198	0296	0394	0492	0590	0688	0786	0884	0982	1081	1179	1277
50	25	0000	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0700	0800	0900	1001	1101	1201
		00	01	04	09	16	25	36	49	64	81	00	21	44
		00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12

		13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
		69	96	25	56	89	24	61	00	41	84	29	76	25
1		127	129	132	134	136	139	141	144	146	148	151	153	156
2		453	457	462	466	470	475	479	484	488	492	497	501	506
3		979	985	992	998	1004	1011	1017	1024	1030	1036	1043	1049	1056
4		1705	1713	1722	1730	1738	1747	1755	1764	1772	1780	1789	1797	1806
5		2631	2641	2652	2662	2672	2683	2693	2704	2714	2724	2735	2745	2756
6		3757	3769	3782	3794	3806	3819	3831	3844	3856	3868	3881	3893	3906
7		5083	5097	5112	5126	5140	5155	5169	5184	5198	5212	5227	5241	5256
8		6609	6625	6642	6658	6674	6691	6707	6724	6740	6756	6773	6789	6806
9		8335	8353	8372	8390	8408	8427	8445	8464	8482	8500	8519	8537	8556
10	1	0261	0281	0302	0322	0342	0363	0383	0404	0424	0444	0465	0485	0506
11	1	2387	2409	2432	2454	2476	2499	2521	2544	2566	2588	2611	2633	2656
12	1	4713	4737	4762	4786	4810	4835	4859	4884	4908	4932	4957	4981	5006
13	1	7239	7265	7292	7318	7344	7371	7397	7424	7450	7476	7503	7529	7556
14	1	9965	9993	*0022	*0050	*0078	*0107	*0135	*0164	*0192	*0220	*0249	*0277	*0306
15	2	2891	2921	2952	2982	3012	3043	3073	3104	3134	3164	3195	3225	3256
16	2	6017	6049	6082	6114	6146	6179	6211	6244	6276	6308	6341	6373	6406
17	2	9343	9377	9412	9446	9480	9515	9549	9584	9618	9652	9687	9721	9756
18	3	2869	2905	2942	2978	3014	3051	3087	3124	3160	3196	3233	3269	3306
19	3	6595	6633	6672	6710	6748	6787	6825	6864	6902	6940	6979	7017	7056
20	4	0521	0561	0602	0642	0682	0723	0763	0804	0844	0884	0925	0965	1006
21	4	4647	4689	4732	4774	4816	4859	4901	4944	4986	5028	5071	5113	5156
22	4	8973	9017	9062	9106	9150	9195	9239	9284	9328	9372	9417	9461	9506
23	5	3499	3545	3592	3638	3684	3731	3777	3824	3870	3916	3963	4009	4056
24	5	8225	8273	8322	8370	8418	8467	8515	8564	8612	8660	8709	8757	8806
25	6	3151	3201	3252	3302	3352	3403	3453	3504	3554	3604	3655	3705	3756
26	6	8277	8329	8382	8434	8486	8539	8591	8644	8696	8748	8801	8853	8906
27	7	3603	3657	3712	3766	3820	3875	3929	3984	4038	4092	4147	4201	4256
28	7	9129	9185	9242	9298	9354	9411	9467	9524	9580	9636	9693	9749	9806
29	8	4855	4913	4972	5030	5088	5147	5205	5264	5322	5380	5439	5497	5556
30	9	0781	0841	0902	0962	1022	1083	1143	1204	1264	1324	1385	1445	1506
31	9	6907	6969	7032	7094	7156	7219	7281	7344	7406	7468	7531	7593	7656
32	10	3233	3297	3362	3426	3490	3555	3619	3684	3748	3812	3877	3941	4006
33	10	9759	9825	9892	9958	*0024	*0091	*0157	*0224	*0290	*0356	*0423	*0489	*0556
34	11	6485	6553	6622	6690	6758	6827	6895	6964	7032	7100	7169	7237	7306
35	12	3411	3481	3552	3622	3692	3763	3833	3904	3974	4044	4115	4185	4256
36	13	0537	0609	0682	0754	0826	0899	0971	1044	1116	1188	1261	1333	1406
37	13	7863	7937	8012	8086	8160	8235	8309	8384	8458	8532	8607	8681	8756
38	14	5389	5465	5542	5618	5694	5771	5847	5924	6000	6076	6153	6229	6306
39	15	3115	3193	3272	3350	3428	3507	3585	3664	3742	3820	3899	3977	4056
40	16	1041	1121	1202	1282	1362	1443	1523	1604	1684	1764	1845	1925	2006
41	16	9167	9249	9332	9414	9496	9579	9661	9744	9826	9908	9991	*0073	*0156
42	17	7493	7577	7662	7746	7830	7915	7999	8084	8168	8252	8337	8421	8506
43	18	6019	6105	6192	6278	6364	6451	6537	6624	6710	6796	6883	6969	7056
44	19	4745	4833	4922	5010	5098	5187	5275	5364	5452	5540	5629	5717	5806
45	20	3671	3761	3852	3942	4032	4123	4213	4304	4394	4484	4575	4665	4756
46	21	2797	2889	2982	3074	3166	3259	3351	3444	3536	3628	3721	3813	3906
47	22	2123	2217	2312	2406	2500	2595	2689	2784	2878	2972	3067	3161	3256
48	23	1649	1745	1842	1938	2034	2131	2227	2324	2420	2516	2613	2709	2806
49	24	1375	1473	1572	1670	1768	1867	1965	2064	2162	2260	2359	2457	2556
50	25	1301	1401	1502	1602	1702	1803	1903	2004	2104	2204	2305	2405	2506
		69	96	25	56	89	24	61	00	41	84	29	76	25
		13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

		26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
		76	29	84	41	00	61	24	89	56	25	96	69
1		158	161	163	166	169	171	174	176	179	182	184	187
2		510	515	519	524	529	533	538	542	547	552	556	561
3		1062	1069	1075	1082	1089	1095	1102	1108	1115	1122	1128	1135
4		1814	1823	1831	1840	1849	1857	1866	1874	1883	1892	1900	1904
5		2766	2777	2787	2798	2809	2819	2830	2840	2851	2862	2872	2883
6		3918	3931	3943	3956	3969	3981	3994	4006	4019	4032	4044	4057
7		5270	5285	5299	5314	5329	5343	5358	5372	5387	5402	5416	5431
8		6822	6839	6855	6872	6889	6905	6922	6938	6955	6972	6988	7005
9		8574	8593	8611	8630	8649	8667	8686	8704	8723	8742	8760	8779
10	1	0526	0547	0567	0588	0609	0629	0650	0670	0691	0712	0732	0753
11	1	2678	2701	2723	2746	2769	2791	2814	2836	2859	2882	2904	2927
12	1	5030	5055	5079	5104	5129	5153	5178	5202	5227	5252	5276	5301
13	1	7582	7609	7635	7662	7689	7715	7742	7768	7795	7822	7848	7875
14	2	0334	0363	0391	0420	0449	0477	0506	0534	0563	0592	0620	0649
15	2	3286	3317	3347	3378	3409	3439	3470	3500	3531	3562	3592	3623
16	2	6438	6471	6503	6536	6569	6601	6634	6666	6699	6732	6764	6797
17	2	9790	9825	9859	9894	9929	9963	9998	*0032	*0067	*0102	*0136	*0171
18	3	3342	3379	3415	3452	3489	3525	3562	3598	3635	3672	3708	3745
19	3	7094	7133	7171	7210	7249	7287	7326	7364	7403	7442	7480	7519
20	4	1046	1087	1127	1168	1209	1249	1290	1330	1371	1412	1452	1493
21	4	5198	5241	5283	5326	5369	5411	5454	5496	5539	5582	5624	5667
22	4	9550	9595	9639	9684	9729	9773	9818	9862	9907	9952	9996	*0041
23	5	4102	4149	4195	4242	4289	4335	4382	4428	4475	4522	4568	4615
24	5	8854	8903	8951	9000	9049	9097	9146	9194	9243	9292	9340	9389
25	6	3806	3857	3907	3958	4009	4059	4110	4160	4211	4262	4312	4363
26	6	8958	9011	9063	9116	9169	9221	9274	9326	9379	9432	9484	9537
27	7	4310	4365	4419	4474	4529	4583	4638	4692	4747	4802	4856	4911
28	7	9862	9919	9975	*0032	*0089	*0145	*0202	*0258	*0315	*0372	*0428	*0485
29	8	5614	5673	5731	5790	5849	5907	5966	6024	6083	6142	6200	6259
30	9	1566	1627	1687	1748	1809	1869	1930	1990	2051	2112	2172	2233
31	9	7718	7781	7843	7906	7969	8031	8094	8156	8219	8282	8344	8407
32	10	4070	4135	4199	4264	4329	4393	4458	4522	4587	4652	4716	4781
33	11	0622	0684	0755	0822	0889	0955	1022	1088	1155	1222	1288	1355
34	11	7374	7443	7511	7580	7649	7717	7786	7854	7923	7992	8060	8129
35	12	4326	4397	4467	4538	4609	4679	4750	4820	4891	4962	5032	5103
36	13	1478	1551	1623	1696	1769	1841	1914	1986	2059	2132	2204	2277
37	13	8830	8905	8979	9054	9129	9203	9278	9352	9427	9502	9576	9651
38	14	6382	6459	6535	6612	6689	6765	6842	6918	6995	7072	7148	7225
39	15	4134	4213	4291	4370	4449	4527	4606	4684	4763	4842	4920	4999
40	16	2086	2167	2247	2328	2409	2489	2570	2650	2731	2812	2892	2973
41	17	0238	0321	0403	0486	0569	0651	0734	0816	0899	0982	1064	1147
42	17	8590	8675	8759	8844	8929	9013	9098	9182	9267	9352	9436	9521
43	18	7142	7229	7315	7402	7489	7575	7662	7748	7835	7922	8008	8095
44	19	5894	5983	6071	6160	6249	6337	6426	6514	6603	6692	6780	6869
45	20	4846	4937	5027	5118	5209	5299	5390	5480	5571	5662	5752	5843
46	21	3998	4091	4183	4276	4369	4461	4554	4646	4739	4832	4924	5017
47	22	3350	3445	3539	3634	3729	3823	3918	4012	4107	4202	4296	4391
48	23	2902	2999	3095	3192	3289	3385	3482	3578	3675	3772	3868	3965
49	24	2654	2753	2851	2950	3049	3147	3246	3344	3443	3542	3640	3739
50	25	2606	2707	2807	2908	3009	3109	3210	3310	3411	3512	3612	3713
		76	29	84	41	00	61	24	89	56	25	96	69
		26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37

		38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
		44	21	00	81	64	49	36	25	16	09	04	01	00
1		190	193	196	198	201	204	207	210	213	216	219	222	225
2		566	571	576	580	585	590	595	600	605	610	615	620	625
3		1142	1149	1156	1162	1169	1176	1183	1190	1197	1204	1211	1218	1225
4		1918	1927	1936	1944	1953	1962	1971	1980	1989	1998	2007	2016	2025
5		2894	2905	2916	2926	2937	2948	2959	2970	2981	2992	3003	3014	3025
6		4070	4083	4096	4108	4121	4134	4147	4160	4173	4186	4199	4212	4225
7		5446	5461	5476	5490	5505	5520	5535	5550	5565	5580	5595	5610	5625
8		7022	7039	7056	7072	7089	7106	7123	7140	7157	7174	7191	7208	7225
9		8798	8817	8836	8854	8873	8892	8911	8930	8949	8968	8987	9006	9025
10	1	0774	0795	0816	0836	0857	0878	0899	0920	0941	0962	0983	1004	1025
11	1	2950	2973	2996	3018	3041	3064	3087	3110	3133	3156	3179	3202	3225
12	1	5326	5351	5376	5400	5425	5450	5475	5500	5525	5550	5575	5600	5625
13	1	7902	7929	7956	7982	8009	8036	8063	8090	8117	8144	8171	8198	8225
14	2	0678	0707	0736	0764	0793	0822	0851	0880	0909	0938	0967	0996	1025
15	2	3654	3685	3716	3746	3777	3808	3839	3870	3901	3932	3963	3994	4025
16	2	6830	6863	6896	6928	6961	6994	7027	7060	7093	7126	7159	7192	7225
17	3	0206	0241	0276	0310	0345	0380	0415	0450	0485	0520	0555	0590	0625
18	3	3782	3819	3856	3892	3929	3966	4003	4040	4077	4114	4151	4188	4225
19	3	7558	7597	7636	7674	7713	7752	7791	7830	7869	7908	7947	7986	8025
20	4	1534	1575	1616	1656	1697	1738	1779	1820	1861	1902	1943	1984	2025
21	4	5710	5753	5796	5838	5881	5924	5967	6010	6053	6096	6139	6182	6225
22	5	0086	0131	0176	0220	0265	0310	0355	0400	0445	0490	0535	0580	0625
23	5	4662	4709	4756	4802	4849	4896	4943	4990	5037	5084	5131	5178	5225
24	5	9438	9487	9536	9584	9633	9682	9731	9780	9829	9878	9927	9976	*0025
25	6	4414	4465	4516	4566	4617	4668	4719	4770	4821	4872	4923	4974	5025
26	6	9590	9643	9696	9748	9801	9854	9907	9960	*0013	*0066	*0119	*0172	*0225
27	7	4966	5021	5076	5130	5185	5240	5295	5350	5405	5460	5515	5570	5625
28	8	0542	0599	0656	0712	0769	0826	0883	0940	0997	1054	1111	1168	1225
29	8	6318	6377	6436	6494	6553	6612	6671	6730	6789	6848	6907	6966	7025
30	9	2294	2355	2416	2476	2537	2598	2659	2720	2781	2842	2903	2964	3025
31	9	8470	8533	8596	8658	8721	8784	8847	8910	8973	9036	9099	9162	9225
32	10	4846	4911	4976	5040	5105	5170	5235	5300	5365	5430	5495	5560	5625
33	11	1422	1489	1556	1622	1689	1756	1823	1890	1957	2024	2091	2158	2225
34	11	8198	8267	8336	8404	8473	8542	8611	8680	8749	8818	8887	8956	9025
35	12	5174	5245	5316	5386	5457	5528	5599	5670	5741	5812	5883	5954	6025
36	13	2350	2423	2496	2568	2641	2714	2787	2860	2933	3006	3079	3152	3225
37	13	9726	9801	9876	9950	*0025	*0100	*0175	*0250	*0325	*0400	*0475	*0550	*0625
38	14	7302	7379	7456	7532	7609	7686	7763	7840	7917	7994	8071	8148	8225
39	15	5078	5157	5236	5314	5393	5472	5551	5630	5709	5788	5867	5946	6025
40	16	3054	3135	3216	3296	3377	3458	3539	3620	3701	3782	3863	3944	4025
41	17	1230	1313	1396	1478	1561	1644	1727	1810	1893	1976	2059	2142	2225
42	17	9606	9691	9776	9860	9945	*0030	*0115	*0200	*0285	*0370	*0455	*0540	*0625
43	18	8182	8269	8356	8442	8529	8616	8703	8790	8877	8964	9051	9138	9225
44	19	6958	7047	7136	7224	7313	7402	7491	7580	7669	7758	7847	7936	8025
45	20	5934	6025	6116	6206	6297	6388	6479	6570	6661	6752	6843	6934	7025
46	21	5110	5203	5296	5388	5481	5574	5667	5760	5853	5946	6039	6132	6225
47	22	4486	4581	4676	4770	4865	4960	5055	5150	5245	5340	5435	5530	5625
48	23	4062	4159	4256	4352	4449	4546	4643	4740	4837	4934	5031	5128	5225
49	24	3838	3937	4036	4134	4233	4332	4431	4530	4629	4728	4827	4926	5025
50	25	3814	3915	4016	4116	4217	4318	4419	4520	4621	4722	4823	4924	5025
		44	21	00	81	64	49	36	25	16	09	04	01	00
		38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

		51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
		01	04	09	16	25	36	49	64	81	00	21	44	69
1		228	231	234	237	240	243	246	249	252	256	259	262	265
2		630	635	640	645	650	655	660	665	670	676	681	686	691
3		1232	1239	1246	1253	1260	1267	1274	1281	1288	1296	1303	1310	1317
4		2034	2043	2052	2061	2070	2079	2088	2097	2106	2116	2125	2134	2143
5		3036	3047	3058	3069	3080	3091	3102	3113	3124	3136	3147	3158	3169
6		4238	4251	4264	4277	4290	4303	4316	4329	4342	4356	4369	4382	4395
7		5640	5655	5670	5685	5700	5715	5730	5745	5760	5776	5791	5806	5821
8		7242	7259	7276	7293	7310	7327	7344	7361	7378	7396	7413	7430	7447
9		9044	9063	9082	9101	9120	9139	9158	9177	9196	9216	9235	9254	9273
10	1	1046	1067	1088	1109	1130	1151	1172	1193	1214	1236	1257	1278	1299
11	1	3248	3271	3294	3317	3340	3363	3386	3409	3432	3456	3479	3502	3525
12	1	5650	5675	5700	5725	5750	5775	5800	5825	5850	5876	5901	5926	5951
13	1	8252	8279	8306	8333	8360	8387	8414	8441	8468	8496	8523	8550	8577
14	2	1054	1083	1112	1141	1170	1199	1228	1257	1286	1316	1345	1374	1403
15	2	4056	4087	4118	4149	4180	4211	4242	4273	4304	4336	4367	4398	4429
16	2	7258	7291	7324	7357	7390	7423	7456	7489	7522	7556	7589	7622	7655
17	3	0660	0695	0730	0765	0800	0835	0870	0905	0940	0976	1011	1046	1081
18	3	4262	4299	4336	4373	4410	4447	4484	4521	4558	4596	4633	4670	4707
19	3	8064	8103	8142	8181	8220	8259	8298	8337	8376	8416	8455	8494	8533
20	4	2066	2107	2148	2189	2230	2271	2312	2353	2394	2436	2477	2518	2559
21	4	6268	6311	6354	6397	6440	6483	6526	6569	6612	6656	6699	6742	6785
22	5	0670	0715	0760	0805	0850	0895	0940	0985	1030	1076	1121	1166	1211
23	5	5272	5319	5366	5413	5460	5507	5554	5601	5648	5696	5743	5790	5837
24	6	0074	0123	0172	0221	0270	0319	0368	0417	0466	0516	0565	0614	0663
25	6	5076	5127	5178	5229	5280	5331	5382	5433	5484	5536	5587	5638	5689
26	7	0278	0331	0384	0437	0490	0543	0596	0649	0702	0756	0809	0862	0915
27	7	5680	5735	5790	5845	5900	5955	6010	6065	6120	6176	6231	6286	6341
28	8	1282	1339	1396	1453	1510	1567	1624	1681	1738	1796	1853	1910	1967
29	8	7084	7143	7202	7261	7320	7379	7438	7497	7556	7616	7675	7734	7793
30	9	3086	3147	3208	3269	3330	3391	3452	3513	3574	3636	3697	3758	3819
31	9	9288	9351	9414	9477	9540	9603	9666	9729	9792	9856	9919	9982	*0045
32	10	5690	5755	5820	5885	5950	6015	6080	6145	6210	6276	6341	6406	6471
33	11	2292	2359	2426	2493	2560	2627	2694	2761	2828	2896	2963	3030	3097
34	11	9094	9163	9232	9301	9370	9439	9508	9577	9646	9716	9785	9854	9923
35	12	6096	6167	6238	6309	6380	6451	6522	6593	6664	6736	6807	6878	6949
36	13	3298	3371	3444	3517	3590	3663	3736	3809	3882	3956	4029	4102	4175
37	14	0700	0775	0850	0925	1000	1075	1150	1225	1300	1376	1451	1526	1601
38	14	8302	8379	8456	8533	8610	8687	8764	8841	8918	8996	9073	9150	9227
39	15	6104	6183	6262	6341	6420	6499	6578	6657	6736	6816	6895	6974	7053
40	16	4106	4187	4268	4349	4430	4511	4592	4673	4754	4836	4917	4998	5079
41	17	2308	2391	2474	2557	2640	2723	2806	2889	2972	3056	3139	3222	3305
42	18	0710	0795	0880	0965	1050	1135	1220	1305	1390	1476	1561	1646	1731
43	18	9312	9399	9486	9573	9660	9747	9834	9921	*0008	*0096	*0183	*0270	*0357
44	19	8114	8203	8292	8381	8470	8559	8648	8737	8826	8916	9005	9094	9183
45	20	7116	7207	7298	7389	7480	7571	7662	7753	7844	7936	8027	8118	8209
46	21	6318	6411	6504	6597	6690	6783	6876	6969	7062	7156	7249	7342	7435
47	22	5720	5815	5910	6005	6100	6195	6290	6385	6480	6576	6671	6766	6861
48	23	5322	5419	5516	5613	5710	5807	5904	6001	6098	6196	6293	6390	6487
49	24	5124	5223	5322	5421	5520	5619	5718	5817	5916	6016	6115	6214	6313
50	25	5126	5227	5328	5429	5530	5631	5732	5833	5934	6036	6137	6238	6339
		01	04	09	16	25	36	49	64	81	00	21	44	69
		51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63

		64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
		96	25	56	89	24	61	00	41	84	29	76	25
1		268	272	275	278	282	285	289	292	295	299	302	306
2		696	702	707	712	718	723	729	734	739	745	750	756
3		1324	1332	1339	1346	1354	1361	1369	1376	1383	1391	1398	1406
4		2152	2162	2171	2180	2190	2199	2209	2218	2227	2237	2246	2256
5		3180	3192	3203	3214	3226	3237	3249	3260	3271	3283	3294	3306
6		4408	4422	4435	4448	4462	4475	4489	4502	4515	4529	4542	4556
7		5836	5852	5867	5882	5898	5913	5929	5944	5959	5975	5990	6006
8		7464	7482	7499	7516	7534	7551	7569	7586	7603	7621	7638	7656
9		9292	9312	9331	9350	9370	9389	9409	9428	9447	9467	9486	9506
10	1	1320	1342	1363	1384	1406	1427	1449	1470	1491	1513	1534	1556
11	1	35[illegible]8	3572	35[illegible]5	3618	3642	3665	3689	3712	3735	3759	3782	3806
12	1	5976	6002	6027	6052	6078	6103	6129	6154	6179	6205	6230	6256
13	1	8604	8632	8659	8686	8714	8741	8769	8796	8823	8851	8878	8906
14	2	1432	1462	1491	1520	1550	1579	1609	1638	1667	1697	1726	1756
15	2	4460	4492	4523	4554	4586	4617	4649	4680	4711	4743	4774	4806
16	2	7688	7722	7755	7788	7822	7855	7889	7922	7955	7989	8022	8056
17	3	1116	1152	1187	1222	1258	1293	1329	1364	1399	1435	1470	1506
18	3	4744	4782	4819	4856	4894	4931	4969	5006	5043	5081	5118	5156
19	3	8572	8612	8651	8690	8730	8769	8809	8848	8887	8927	8966	9006
20	4	2600	2642	2683	2724	2766	2807	2849	2890	2931	2973	3014	3056
21	4	6828	6872	6915	6958	7002	7045	7089	7132	7175	7219	7262	7306
22	5	1256	1302	1347	1392	1438	1483	1529	1574	1619	1665	1710	1756
23	5	5884	5932	5979	6026	6074	6121	6169	6216	6263	6311	6358	6406
24	6	0712	0762	0811	0860	0910	0959	1009	1058	1107	1157	1206	1256
25	6	5740	5792	5843	5894	5946	5997	6049	6100	6151	6203	6254	6306
26	7	0968	1022	1075	1128	1182	1235	1289	1342	1395	1449	1502	1556
27	7	6396	6452	6507	6562	6618	6673	6729	6784	6839	6895	6950	7006
28	8	2024	2082	2139	2196	2254	2311	2369	2426	2483	2541	2598	2656
29	8	7852	7912	7971	8030	8090	8149	8209	8268	8327	8387	8446	8506
30	9	3880	3942	4003	4064	4126	4187	4249	4310	4371	4433	4494	4556
31	10	0108	0172	0235	0298	0362	0425	0489	0552	0615	0679	0742	0806
32	10	6536	6602	6667	6732	6798	6863	6929	6994	7059	7125	7190	7256
33	11	3164	3232	3299	3366	3434	3501	3569	3636	3703	3771	3838	3906
34	11	9992	*0062	*0131	*0200	*0270	*0339	*0409	*0478	*0547	*0617	*0686	*0756
35	12	7020	7092	7163	7234	7306	7377	7449	7520	7591	7663	7734	7806
36	13	4248	4322	4395	4468	4542	4615	4689	4762	4835	4909	4982	5056
37	14	1676	1752	1827	1902	1978	2053	2129	2204	2279	2355	2430	2506
38	14	9304	9382	9459	9536	9614	9691	9769	9846	9923	*0001	*0078	*0156
39	15	7132	7212	7291	7370	7450	7529	7609	7688	7767	7847	7926	8006
40	16	5160	5242	5323	5404	5486	5567	5649	5730	5811	5893	5974	6056
41	17	3388	3472	3555	3638	3722	3805	3889	3972	4055	4139	4222	4306
42	18	1816	1902	1987	2072	2158	2243	2329	2414	2499	2585	2670	2756
43	19	0444	0532	0619	0706	0794	0881	0969	1056	1143	1231	1318	1406
44	19	9272	9361	9451	9540	9630	9719	9809	9898	9987	*0077	*0166	*0256
45	20	8300	8392	8483	8574	8666	8757	8849	8940	9031	9123	9214	9306
46	21	7528	7622	7715	7808	7902	7995	8089	8182	8275	8369	8462	8556
47	22	6956	7052	7147	7242	7338	7433	7529	7624	7719	7815	7910	8006
48	23	6584	6682	6779	6876	6974	7071	7169	7266	7363	7461	7558	7656
49	24	6412	6512	6611	6710	6810	6909	7009	7108	7207	7307	7406	7506
50	25	6440	6342	6643	6744	6846	6947	7049	7150	7251	7353	7454	7556
		96	25	56	89	24	61	00	41	84	29	76	25
		64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75

		76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87
		76	29	84	41	00	61	24	89	56	25	96	69
1		309	313	316	320	324	327	331	334	338	342	345	349
2		761	767	772	778	784	789	795	800	806	812	817	823
3		1413	1421	1428	1436	1444	1451	1459	1466	1474	1482	1489	1497
4		2265	2275	2284	2294	2304	2313	2323	2332	2342	2352	2361	2371
5		3317	3329	3340	3352	3364	3375	3387	3398	3410	3422	3433	3445
6		4569	4583	4596	4610	4624	4637	4651	4664	4678	4692	4705	4719
7		6021	6037	6052	6068	6084	6099	6115	6130	6146	6162	6177	6193
8		7673	7691	7708	7726	7744	7761	7779	7796	7814	7832	7849	7867
9		9525	9545	9564	9584	9604	9623	9643	9662	9682	9702	9721	9741
10	1	1577	1599	1620	1642	1664	1685	1707	1728	1750	1772	1793	1815
11	1	3829	3853	3876	3900	3924	3947	3971	3994	4018	4042	4065	4089
12	1	6281	6307	6332	6358	6384	6409	6435	6460	6486	6512	6537	6563
13	1	8933	8961	8988	9016	9044	9071	9099	9126	9154	9182	9209	9237
14	2	1785	1815	1844	1874	1904	1933	1963	1992	2022	2052	2081	2111
15	2	4837	4869	4900	4932	4964	4995	5027	5058	5090	5122	5153	5185
16	2	8089	8123	8156	8190	8224	8257	8291	8324	8358	8392	8425	8459
17	3	1541	1577	1612	1648	1684	1719	1755	1790	1826	1862	1897	1933
18	3	5193	5231	5268	5306	5344	5381	5419	5456	5494	5532	5569	5607
19	3	9045	9085	9124	9164	9204	9243	9283	9322	9362	9402	9441	9481
20	4	3097	3139	3180	3222	3264	3305	3347	3388	3430	3472	3513	3555
21	4	7349	7393	7436	7480	7524	7567	7611	7654	7698	7742	7785	7829
22	5	1801	1847	1892	1938	1984	2029	2075	2120	2166	2212	2257	2303
23	5	6453	6501	6548	6596	6644	6691	6739	6786	6834	6882	6929	6977
24	6	1305	1355	1404	1454	1504	1553	1603	1652	1702	1752	1801	1851
25	6	6357	6409	6460	6512	6564	6615	6667	6718	6770	6822	6873	6925
26	7	1609	1663	1716	1770	1824	1877	1931	1984	2038	2092	2145	2199
27	7	7061	7117	7172	7228	7284	7339	7395	7450	7506	7562	7617	7673
28	8	2713	2771	2828	2886	2944	3001	3059	3116	3174	3232	3289	3347
29	8	8565	8625	8684	8744	8804	8863	8923	8982	9042	9102	9161	9221
30	9	4617	4679	4740	4802	4864	4925	4987	5048	5110	5172	5233	5295
31	10	0869	0933	0996	1060	1124	3187	1251	1314	1378	1442	1505	1569
32	10	7321	7387	7452	7518	7584	764[redacted]	7715	77[redacted]	7846	7912	7977	8043
33	11	3973	4041	4108	4176	4244	4311	4379	4446	4514	4582	4649	4717
34	12	0825	0895	0964	1034	1104	1173	1243	1312	1382	1452	1521	1591
35	12	7877	7949	8020	8092	8164	8235	8307	8378	8450	8522	8593	8665
36	13	5129	5203	5276	5350	[redacted]424	5497	5571	[redacted]64[redacted]	[redacted]718	5792	5865	5939
37	14	2581	2657	2732	2808	2884	2959	3035	3110	3186	3262	3337	3413
38	15	0233	0311	0388	0466	0544	0621	0699	0776	0854	0932	1009	1087
39	15	8085	8165	8244	8324	8404	8483	8563	8642	8722	8802	8881	8961
40	16	6137	6219	6300	6382	6464	6545	6627	6708	6790	6872	6953	7035
41	17	4389	4473	4556	4640	4724	4807	4891	4974	5058	5142	5225	5309
42	18	2841	2927	3012	3098	3184	3269	3355	3440	3526	3612	3697	3783
43	19	1493	1581	1668	1756	1844	1931	2019	2106	2194	2282	2364	2457
44	20	0345	0435	0524	0614	0704	0793	0883	0972	1062	1152	1241	1331
45	20	4397	9489	9580	9672	9764	9855	9947	*0038	*0130	*0222	*0313	*0405
46	21	8649	8743	8836	8930	9024	9117	9211	9304	9398	9492	9585	9679
47	22	8101	8197	8292	8388	8484	8579	8675	8770	8866	8962	9057	9153
48	23	7753	7851	7948	8046	8144	8241	8339	8436	8534	8632	8729	8827
49	24	7605	7705	7804	7904	8004	8103	8203	8302	8402	8502	8601	8701
50	25	7657	7759	7860	7962	8064	8165	8267	8368	8470	8572	8673	8775
		76	29	84	41	00	61	24	89	56	25	96	69
		76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87

		88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
		44	21	00	81	64	49	36	25	16	09	04	01
1		353	357	361	364	368	372	376	380	384	388	392	396
2		829	835	841	846	852	858	864	870	876	882	888	894
3		1505	1513	1521	1528	1536	1544	1552	1560	1568	1576	1584	1592
4		2381	2391	2401	2410	2420	2430	2440	2450	2460	2470	2480	2490
5		3457	3469	3481	3492	3504	3516	3528	3540	3552	3564	3576	3588
6		4733	4747	4761	4774	4788	4802	4816	4830	4844	4858	4872	4886
7		6209	6225	6241	6256	6272	6288	6304	6320	6336	6352	6368	6384
8		7885	7903	7921	7938	7956	7974	7992	8010	8028	8046	8064	8082
9		9761	9781	9801	9820	9840	9860	9880	9900	9920	9940	9960	9980
10	1	1837	1859	1881	1902	1924	1946	1968	1990	2012	2034	2056	2078
11	1	4113	4137	4161	4184	4208	4232	4256	4280	4304	4328	4352	4376
12	1	6589	6615	6641	6666	6692	6718	6744	6770	6796	6822	6848	6874
13	1	9265	9293	9321	9348	9376	9404	9432	9460	9488	9516	9544	9572
14	2	2141	2171	2201	2230	2260	2290	2320	2350	2380	2410	2440	2470
15	2	5217	5249	5281	5312	5344	5376	5408	5440	5472	5504	5536	5568
16	2	8493	8527	8561	8594	8628	8662	8696	8730	8764	8798	8832	8866
17	3	1969	2005	2041	2076	2112	2148	2184	2220	2256	2292	2328	2364
18	3	5645	5683	5721	5758	5796	5834	5872	5910	5948	5986	6024	6062
19	3	9521	9561	9601	9640	9680	9720	9760	9800	9840	9880	9920	9960
20	4	3597	3639	3681	3722	3764	3806	3848	3890	3932	3974	4016	4058
21	4	7873	7917	7961	8004	8048	8092	8136	8180	8224	8268	8312	8356
22	5	2349	2395	2441	2486	2532	2578	2624	2670	2716	2762	2808	2854
23	5	7025	7073	7121	7168	7216	7264	7312	7360	7408	7456	7504	7552
24	6	1901	1951	2001	2050	2100	2150	2200	2250	2300	2350	2400	2450
25	6	6977	7029	7081	7132	7184	7236	7288	7340	7392	7444	7496	7548
26	7	2253	2307	2361	2414	2468	2522	2576	2630	2684	2738	2792	2846
27	7	7729	7785	7841	7896	7952	8008	8064	8120	8176	8232	8288	8344
28	8	3405	3463	3521	3578	3636	3694	3752	3810	3868	3926	3984	4042
29	8	9281	9341	9401	9460	9520	9580	9640	9700	9760	9820	9880	9940
30	9	5357	5419	5481	5542	5604	5666	5728	5790	5852	5914	5976	6038
31	10	1633	1697	1761	1824	1888	1452	2016	2080	2144	2208	2272	2336
32	10	8109	8175	8241	8306	8372	8438	8504	8570	8636	8702	8768	8834
33	11	47[illegible]5	4853	4921	4988	5056	5124	5192	5260	5328	5396	5464	5532
34	12	1661	1731	1801	1870	1940	2010	2080	2150	2220	2290	2360	2430
35	12	8737	8809	8881	8952	9024	9096	9168	9240	9312	9384	9456	9528
36	13	6013	6087	6161	6234	6308	6382	6456	6530	6604	6678	6752	6826
37	14	[illegible]	3565	3641	3716	3792	3868	3944	4020	4096	4172	4248	4324
38	15	1165	1243	1321	1398	1476	1554	1632	1710	1788	1866	1944	2022
39	15	9041	9121	9201	9280	9360	9440	9520	9600	9680	9760	9840	9920
40	16	7117	7199	7281	7362	7444	7526	7608	7690	7772	7854	7936	8018
41	17	5393	5477	5561	5644	5728	5812	5896	5980	6064	6148	6232	6316
42	18	3869	3955	4041	4126	4212	4298	4384	4470	4556	4642	4728	4814
43	19	2545	2633	2721	2808	2896	2984	3072	3160	3248	3336	3424	3512
44	20	1421	1511	1601	1690	1780	1870	1960	2050	2140	2230	2320	2410
45	21	0497	0589	0681	0772	0864	0956	1048	1140	1232	1324	1416	1508
46	21	9773	9867	9961	*0054	*0148	*0242	*0336	*0430	*0524	*0618	*0712	*0806
47	22	9249	9345	9441	9536	9632	9728	9824	9920	*0016	*0112	*0208	*0304
48	[illegible]	8925	9023	9121	9218	9316	9414	9512	9610	9708	9806	9904	*0002
49	24	8801	8901	9001	9100	9200	9300	9400	9500	9600	9700	9800	9900
50	25	8877	8979	9081	9182	9284	9386	9488	9590	9692	9794	9896	9998
		44	21	00	81	64	49	36	25	16	09	04	01
		88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

		00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
		00	01	04	09	16	25	36	49	64	81	00	21	44
51	26	0100	0202	0304	0406	0508	0610	0712	0814	0916	1018	1121	1223	1325
52	27	0400	0504	0608	0712	0816	0920	1024	1128	1232	1336	1441	1545	1649
53	28	0900	1006	1112	1218	1324	1430	1536	1642	1748	1854	1961	2067	2173
54	29	1600	1708	1816	1924	2032	2140	2248	2356	2464	2572	2681	2789	2897
55	30	2500	2610	2720	2830	2940	3050	3160	3270	3380	3490	3601	3711	3821
56	31	3600	3712	3824	3936	4048	4160	4272	4384	4496	4608	4721	4833	4945
57	32	4900	5014	5128	5242	5356	5470	5584	5698	5812	5926	6041	6155	6269
58	33	6400	6516	6632	6748	6864	6980	7096	7212	7328	7444	7561	7677	7793
59	34	8100	8218	8336	8454	8572	8690	8808	8926	9044	9162	9281	9399	9517
60	36	0000	0120	0240	0360	0480	0600	0720	0840	0960	1080	1201	1321	1441
61	37	2100	2222	2344	2466	2588	2710	2832	2954	3076	3198	3321	3443	3565
62	38	4400	4524	4648	4772	4896	5020	5144	5268	5392	5516	5641	5765	5889
63	39	6900	7026	7152	7278	7404	7530	7656	7782	7908	8034	8161	8287	8413
64	40	9600	9728	9856	9984	*0112	*0240	*0368	*0496	*0624	*0752	*0881	*1009	*1137
65	42	2500	2630	2760	2890	3020	3150	3280	3410	3540	3670	3801	3931	4061
66	43	5600	5732	5864	5996	6128	6260	6392	6524	6656	6788	6921	7053	7185
67	44	8900	9034	9168	9302	9436	9570	9704	9838	9972	*0106	*0241	*0375	*0509
68	46	2400	2536	2672	2808	2944	3080	3216	3352	3488	3624	3761	3897	4033
69	47	6100	6238	6376	6514	6652	6790	6928	7066	7204	7342	7481	7619	7757
70	49	0000	0140	0280	0420	0560	0700	0840	0980	1120	1260	1401	1541	1681
71	50	4100	4242	4384	4526	4668	4810	4952	5094	5236	5378	5521	5663	5805
72	51	8400	8544	8688	8832	8976	9120	9264	9408	9552	9696	9841	9985	*0129
73	53	2900	3046	3192	3338	3484	3630	3776	3922	4068	4214	4361	4507	4653
74	54	7600	7748	7896	8044	8192	8340	8488	8636	8784	8932	9081	9229	9377
75	56	2500	2650	2800	2950	3100	3250	3400	3550	3700	3850	4001	4151	4301
76	57	7600	7752	7904	8056	8208	8360	8512	8664	8816	8968	9121	9273	9425
77	59	2900	3054	3208	3362	3516	3670	3824	3978	4132	4286	4441	4595	4749
78	60	8400	8556	8712	8868	9024	9180	9336	9492	9648	9804	9961	*0117	*0273
79	62	4100	4258	4416	4574	4732	4890	5048	5206	5364	5522	5681	5839	5997
80	64	0000	0160	0320	0480	0640	0800	0960	1120	1280	1440	1601	1761	1921
81	65	6100	6262	6424	6586	6748	6910	7072	7234	7396	7558	7721	7883	8045
82	67	2400	2564	2728	2892	3056	3220	3384	3548	3712	3876	4041	4205	4369
83	68	8900	9066	9232	9398	9564	9730	9896	*0062	*0228	*0394	*0561	*0727	*0893
84	70	5600	5768	5936	6104	6272	6440	6608	6776	6944	7112	7281	7449	7617
85	72	2500	2670	2840	3010	3180	3350	3520	3690	3860	4030	4201	4371	4541
86	73	9600	9772	9944	*0116	*0288	*0460	*0632	*0804	*0976	*1148	*1321	*1493	*1665
87	75	6900	7074	7248	7422	7396	7770	7944	8118	8292	8466	8641	8815	8989
88	77	4400	4576	4752	4928	5104	5280	5456	5632	5808	5984	6161	6337	6513
89	79	2100	2278	2456	2634	2812	2990	3168	3346	3524	3702	3881	4059	4237
90	81	0000	0180	0360	0540	0720	0900	1080	1260	1440	1620	1801	1981	2161
91	82	8100	8282	8464	8646	8828	9010	9192	9374	9556	9738	9921	*0103	*0285
92	84	6400	6584	6768	6952	7136	7320	7504	7688	7872	8056	8241	8425	8609
93	86	4900	5086	5272	5458	5644	5830	6016	6202	6388	6574	6761	6947	7133
94	88	3600	3788	3976	4164	4352	4540	4728	4916	5104	5292	5481	5669	5857
95	90	2500	2690	2880	3070	3260	3450	3640	3830	4020	4210	4401	4591	4781
96	92	1600	1792	1984	2176	2368	2560	2752	2944	3136	3328	3521	3713	3905
97	94	0900	1094	1288	1482	1676	1870	2064	2258	2452	2646	2841	3035	3229
98	96	0400	0596	0792	0988	1184	1380	1576	1772	1968	2164	2361	2557	2753
99	98	0100	0298	0496	0694	0892	1090	1288	1486	1684	1882	2081	2279	2477
		00	01	04	09	16	25	36	49	64	81	00	21	[illegible]
		00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12

X

		13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
		69	96	25	56	89	24	61	00	41	84	29	76	25
51	26	1427	1529	1632	1734	1836	1939	2041	2144	2246	2348	2451	2553	2656
52	27	1753	1857	1962	2066	2170	2275	2379	2484	2588	2692	2797	2901	3006
53	28	2279	2385	2492	2598	2704	2811	2917	3024	3130	3236	3343	3449	3556
54	29	3005	3113	3222	3330	3438	3547	3655	3764	3872	3980	4089	4197	4306
55	30	3931	4041	4152	4262	4372	4483	4593	4704	4814	4924	5035	5145	5256
56	31	5057	5169	5282	5394	5506	5619	5731	5844	5956	6068	6181	6293	6406
57	32	6383	6497	6612	6726	6840	6955	7069	7184	7298	7412	7527	7641	7756
58	33	7909	8025	8142	8258	8374	8491	8607	8724	8840	8956	9073	9189	9306
59	34	9635	9753	9872	9990	*0108	*0227	*0345	*0464	*0582	*0700	*0819	*0937	*1056
60	36	1561	1681	1802	1922	2042	2163	2283	2404	2524	2644	2765	2885	3006
61	37	3687	3809	3932	4054	4176	4299	4421	4544	4666	4788	4911	5033	5156
62	38	6013	6137	6262	6386	6510	6635	6759	6884	7008	7132	7257	7381	7506
63	39	8539	8665	8792	8918	9044	9171	9297	9424	9550	9676	9803	9929	*0056
64	41	1265	1393	1522	1650	1778	1907	2035	2164	2292	2420	2549	2677	2806
65	42	4191	4321	4452	4582	4712	4843	4973	5104	5234	5364	5495	5625	5756
66	43	7317	7449	7582	7714	7846	7979	8111	8244	8376	8508	8641	8773	8906
67	45	0643	0777	0912	1046	1180	1315	1449	1584	1718	1852	1987	2121	2256
68	46	4169	4305	4442	4578	4714	4851	4987	5124	5260	5396	5533	5669	5806
69	47	7895	8033	8172	8310	8448	8587	8725	8864	9002	9140	9279	9417	9556
70	49	1821	1961	2102	2242	2382	2523	2663	2804	2944	3084	3225	3365	3506
71	50	5947	6089	6232	6374	6516	6659	6801	6944	7086	7228	7371	7513	7656
72	52	0273	0417	0562	0706	0850	0995	1139	1284	1428	1572	1717	1861	2006
73	53	4799	4945	5092	5238	5384	5531	5677	5824	5970	6116	6263	6409	6556
74	54	9525	9673	9822	9970	*0118	*0267	*0415	*0564	*0712	*0860	*1009	*1157	*1306
75	56	4451	4601	4752	4902	5052	5203	5353	5504	5654	5804	5955	6105	6256
76	57	9577	9729	9882	*0034	*0186	*0339	*0491	*0644	*0796	*0948	*1101	*1253	*1406
77	59	4903	5057	5212	5366	5520	5675	5829	5984	6138	6292	6447	6601	6756
78	61	0429	0585	0742	0898	1054	1211	1367	1524	1680	1836	1993	2149	2306
79	62	6155	6313	6472	6630	6788	6947	7105	7264	7422	7580	7739	7897	8056
80	64	2081	2241	2402	2562	2722	2883	3043	3204	3364	3524	3685	3845	4006
81	65	8207	8369	8532	8694	8856	9019	9181	9344	9506	9668	9831	9993	*0156
82	67	4533	4697	4862	5026	5190	5355	5519	5684	5848	6012	6177	6341	6506
83	69	1059	1225	1392	1558	1724	1891	2057	2224	2390	2556	2723	2889	3056
84	70	7785	7953	8122	8290	8458	8627	8795	8964	9132	9300	9469	9637	9806
85	72	4711	4881	5052	5222	5392	5563	5733	5904	6074	6244	6415	6585	6756
86	74	1837	2009	2182	2354	2526	2699	2871	3044	3216	3388	3561	3733	3906
87	75	9163	9337	9512	9686	9860	*0035	*0209	*0384	*0558	*0732	*0907	*1081	*1256
88	77	6689	6865	7042	7218	7394	7571	7747	7924	8100	8276	8453	8629	8806
89	79	4415	4593	4772	4950	5128	5307	5485	5664	5842	6020	6199	6377	6556
90	81	2341	2521	2702	2882	3062	3243	3423	3604	3784	3964	4145	4325	4506
91	83	0467	0649	0832	1014	1196	1379	1561	1744	1926	2108	2291	2473	2656
92	84	8793	8977	9162	9346	9530	9715	9899	*0084	*0268	*0452	*0637	*0821	*1006
93	86	7319	7505	7692	7878	8064	8251	8437	8624	8810	8996	9183	9369	9556
94	88	6045	6233	6422	6610	6798	6987	7175	7364	7552	7740	7929	8117	8306
95	90	4971	5161	5352	5542	5732	5923	6113	6304	6494	6684	6875	7065	7256
96	92	4097	4289	4482	4674	4866	5059	5251	5444	5636	5828	6021	6213	6406
97	94	3423	3617	3812	4006	4200	4395	4589	4784	4978	5172	5367	5561	5756
98	96	2949	3145	3342	3538	3734	3931	4127	4324	4520	4716	4913	5109	5506
99	98	2675	2873	3072	3270	3468	3667	3865	4064	4262	4460	4659	4857	5056
		69	96	25	56	89	24	61	00	41	84	29	76	25
		13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

		26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
		76	29	84	41	00	61	24	89	56	25	96	69
51	26	2758	2861	2963	3066	3169	3271	3374	3476	3579	3682	3784	3887
52	27	3110	3215	3319	3424	3529	3633	3738	3842	3947	4052	4156	4261
53	28	3662	3769	3875	3982	4089	4195	4302	4408	4515	4622	4728	4835
54	29	4414	4523	4631	4740	4849	4957	5066	5174	5283	5392	5500	5609
55	30	5366	5477	5587	5698	5809	5919	6030	6140	6251	6362	6472	6583
56	31	6518	6631	6743	6856	6969	7081	7194	7306	7419	7532	7644	7757
57	32	7870	7985	8099	8214	8329	8443	8558	8672	8787	8902	9016	9131
58	33	9422	9539	9655	9772	9889	*0005	*0122	*0238	*0355	*0472	*0588	*0705
59	35	1174	1293	1411	1530	1649	1767	1886	2004	2123	2242	2360	2479
60	36	3126	3247	3367	3488	3609	3729	3850	3970	4091	4212	4332	4453
61	37	5278	5401	5523	5646	5769	5891	6014	6136	6259	6382	6504	6627
62	38	7630	7755	7879	8004	8129	8253	8378	8502	8627	8752	8876	9001
63	40	0182	0309	0435	0562	0689	0815	0942	1068	1195	1322	1448	1575
64	41	2934	3063	3191	3320	3449	3577	3706	3834	3963	4092	4220	4349
65	42	5886	6017	6147	6278	6409	6539	6670	6800	6931	7062	7192	7323
66	43	9038	9171	9303	9436	9569	9701	9834	9966	*0099	*0232	*0364	*0497
67	45	2390	2525	2659	2794	2929	3063	3198	3332	3467	3602	3736	3871
68	46	5942	6079	6215	6352	6489	6625	6762	6898	7035	7172	7308	7445
69	47	9694	9833	9971	*0110	*0249	*0387	*0526	*0664	*0803	*0942	*1080	*1219
70	49	3646	3787	3927	4068	4209	4349	4490	4630	4771	4912	5052	5193
71	50	7798	7941	8083	8226	8369	8511	8654	8796	8939	9082	9224	9367
72	52	2150	2295	2439	2584	2729	2873	3018	3162	3307	3452	3596	3741
73	53	6702	6849	6995	7142	7289	7435	7582	7728	7875	8022	8168	8315
74	55	1454	1603	1751	1900	2049	2197	2346	2494	2643	2792	2940	3089
75	56	6406	6557	6707	6858	7009	7159	7310	7460	7611	7762	7912	8063
76	58	1558	1711	1863	2016	2169	2321	2474	2626	2779	2932	3084	3237
77	59	6910	7065	7219	7374	7529	7683	7838	7992	8147	8302	8456	8611
78	61	2462	2619	2775	2932	3089	3245	3402	3558	3715	3872	4028	4185
79	62	8214	8373	8531	8690	8849	9007	9166	9324	9483	9642	9800	9959
80	64	4166	4327	4487	4648	4809	4969	5130	5290	5451	5612	5772	5933
81	66	0318	0481	0643	0806	0969	1131	1294	1456	1619	1782	1944	2107
82	67	6670	6835	6999	7164	7329	7493	7658	7822	7987	8152	8316	8481
83	69	3222	3389	3555	3722	3889	4055	4222	4388	4555	4722	4888	5055
84	70	9974	*0143	*0311	*0480	*0649	*0817	*0986	*1154	*1323	*1492	*1660	*1829
85	72	6926	7097	7267	7438	7609	7779	7950	8120	8291	8462	8632	8803
86	74	4078	4251	4423	4596	4769	4941	5114	5286	5459	5632	5804	5977
87	76	1430	1605	1779	1954	2129	2303	2478	2652	2827	3002	3176	3351
88	77	8982	9159	9335	9512	9689	9865	*0042	*0218	*0395	*0572	*0748	*0925
89	79	6734	6913	7091	7270	7449	7627	7806	7984	8163	8342	8520	8699
90	81	4686	4867	5047	5228	5409	5589	5770	5950	6131	6312	6492	6673
91	83	2838	3021	3203	3386	3569	3751	3934	4116	4299	4482	4664	4847
92	85	1190	1375	1559	1744	1929	2113	2298	2482	2667	2852	3036	3221
93	86	9742	9929	*0115	*0302	*0489	*0675	*0862	*1048	*1235	*1422	*1608	*1795
94	88	8494	8683	8871	9060	9249	9437	9626	9814	*0003	*0192	*0380	*0569
95	90	7446	7637	7827	8018	8209	8399	8590	8780	8971	9162	9352	9543
96	92	6598	6791	6983	7176	7369	7561	7754	7946	8139	8332	8524	8717
97	94	5950	6145	6339	6534	6729	6923	7118	7312	7507	7702	7896	8091
98	96	5502	5699	5895	6092	6289	6485	6682	6878	7075	7272	7468	7665
99	98	5234	5453	5651	5850	6049	6247	6446	6644	6843	7042	7240	7439
		76	29	84	41	00	61	24	89	56	25	96	69
		26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37

XII

		38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
		44	21	00	81	64	49	36	25	16	09	04	01	00
51	26	3990	4093	4196	4298	4401	4504	4607	4710	4813	4916	5019	5122	5225
52	27	4366	4471	4576	4680	4785	4890	4995	5100	5205	5310	5415	5520	5625
53	28	4942	5049	5156	5262	5369	5476	5583	5690	5797	5904	6011	6118	6225
54	29	5718	5827	5936	6044	6153	6262	6371	6480	6589	6698	6807	6916	7025
55	30	6694	6805	6916	7026	7137	7248	7359	7470	7581	7692	7803	7914	8025
56	31	7870	7983	8096	8208	8321	8434	8547	8660	8773	8886	8999	9112	9225
57	32	9246	9361	9476	9590	9705	9820	9935	*0050	*0165	*0280	*0395	*0510	*0625
58	34	0822	0939	1056	1172	1289	1406	1523	1640	1757	1874	1991	2108	2225
59	35	2598	2717	2836	2954	3073	3192	3311	3430	3549	3668	3787	3906	4025
60	36	4574	4695	4816	4936	5057	5178	5299	5420	5541	5662	5783	5904	6025
61	37	675[illegible]	6873	6[illegible]96	7118	7241	7364	7487	7610	7733	7856	7979	8102	8225
62	38	9126	9251	9376	9500	9625	9750	9875	*0000	*0125	*0250	*0375	*0500	*0625
63	40	1702	1829	1956	2082	2209	2336	2463	2590	2717	2844	2971	3098	3225
64	41	4478	4607	4736	4864	4993	5122	5251	5380	5509	5638	5767	5896	6025
65	42	7454	7585	7716	7846	7977	8108	8239	8370	8501	8632	8763	8894	9025
66	44	0630	0763	0896	1028	1161	1294	1427	1560	1693	1826	1959	2092	2225
67	45	4006	4141	4276	4410	4545	4680	4815	4950	5085	5220	5355	5490	5625
68	46	7582	7719	7856	7992	8129	8266	8403	8540	8677	8814	8951	9088	9225
69	48	1358	1497	1636	1774	1913	2052	2191	2330	2469	2608	2747	2886	3025
70	49	5334	5475	5616	5756	5897	6038	6179	6320	6461	6602	6743	6884	7025
71	50	9510	9653	9796	9938	*0081	*0224	*0367	*0510	*0653	*0796	*0939	*1082	*1225
72	52	3886	4031	4176	4320	4465	4610	4755	4900	5045	5190	5335	5480	5625
73	53	8462	8609	8756	8902	9049	9196	9343	9490	9637	9784	9931	*0078	*0225
74	55	3238	3387	3536	3684	3833	3982	4131	4280	4429	4578	4727	4876	5025
75	56	8214	8365	8516	8666	8817	8968	9119	9270	9421	9572	9723	9874	*0025
76	58	3390	3543	3696	3848	4001	4154	4307	4460	4613	4766	4919	5072	5225
77	59	8766	8921	9076	9230	9385	9540	9695	9850	*0005	*0160	*0315	*0470	*0625
78	61	4342	4499	4656	4812	4969	5126	5283	5440	5597	5754	5911	6068	6225
79	63	0118	0277	0436	0594	0753	0912	1071	1230	1389	1548	1707	1866	2025
80	64	6094	6255	6416	6576	6737	6898	7059	7220	7381	7542	7703	7864	8025
81	66	2270	2433	2596	2758	2921	3084	3247	3410	3573	3736	3899	4062	4225
82	67	8646	8811	8976	9140	9305	9470	9635	9800	9965	*0130	*0295	*0460	*0625
83	69	5222	5389	5556	5722	5889	6056	6223	6390	6557	6724	6891	7058	7225
84	71	1998	2167	2336	250[illegible]	2673	2842	3011	3180	3349	3518	3687	3856	4025
85	72	8974	9145	9316	9486	9657	9828	9999	*0170	*0341	*0512	*0683	*0854	*1025
86	74	6150	6323	6496	6668	6841	7014	7187	7360	7533	7706	7879	8052	8225
87	76	3526	3701	3876	4050	4225	4400	4575	4750	4925	5100	5275	5450	5625
88	78	1102	1279	1456	1632	1809	1986	2163	2340	2517	2694	2871	3048	3225
89	79	8878	9057	9236	9414	9593	9772	9951	*0130	*0309	*0488	*0667	*0846	*1025
90	81	6854	7035	7216	7396	7577	7758	7939	8120	8301	8482	8663	8844	9025
91	83	5030	5213	5396	5578	5761	5944	6127	6310	6493	6676	6859	7042	7225
92	85	3406	3591	3776	3960	4145	4330	4515	4700	4885	5070	5255	5440	5625
93	87	1982	2169	2356	2542	2729	2916	3103	3290	3477	3664	3851	4038	4225
94	89	0758	0947	1136	1324	1513	1702	1891	2080	2269	2458	2647	2836	3025
95	90	9734	9925	*0116	*0306	*0497	*0688	*0879	*1070	*1261	*1452	*1643	*1834	*2025
96	92	8910	9103	9296	9488	9681	9874	*0067	*0260	*0453	*0646	*0839	*1032	*1225
97	94	8286	8481	8676	8870	9065	9260	9455	9650	9845	*0040	*0235	*0430	*0625
98	96	7862	8059	8256	8452	8649	8846	9043	9240	9437	9634	9831	*0028	*0225
99	98	7638	7837	8036	8234	8433	8632	8831	9030	9229	9428	9627	9826	*0025
		44	21	00	81	64	49	36	25	16	09	04	01	00
		38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

		51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
		01	04	09	16	25	36	49	64	81	00	21	44	69
51	26	5328	5431	5534	5637	5740	5843	5946	6049	6152	6256	6359	6462	6565
52	27	5730	5835	5940	6045	6150	6255	6360	6465	6570	6676	6781	6886	6991
53	28	6332	6439	6546	6653	6760	6867	6974	7081	7188	7296	7403	7510	7617
54	29	7134	7243	7352	7461	7570	7679	7788	7897	8006	8116	8225	8334	8443
55	30	8136	8247	8358	8469	8580	8691	8802	8913	9024	9136	9247	9358	9469
56	31	9338	9451	9564	9677	9790	9903	*0016	*0129	*0242	*0356	*0469	*0582	*0695
57	33	0740	0855	0970	1085	1200	1315	1430	1545	1660	1776	1891	2006	2121
58	34	2342	2459	2576	2693	2810	2927	3044	3161	3278	3396	3513	3630	3747
59	35	4144	4263	4382	4501	4620	4739	4858	4977	5096	5216	5335	5454	5573
60	36	6146	6267	6388	6509	6630	6751	6872	6993	7114	7236	7357	7478	7599
61	37	8348	8471	8594	8717	8840	8963	9086	9209	9332	9456	9579	9702	9825
62	39	0750	0875	1000	1125	1250	1375	1500	1625	1750	1876	2001	2126	2251
63	40	3352	3479	3606	3733	3860	3987	4114	4241	4368	4496	4623	4750	4877
64	41	6154	6283	6412	6541	6670	6799	6928	7057	7186	7316	7445	7574	7703
65	42	9156	9287	9418	9549	9680	9811	9942	*0073	*0204	*0336	*0467	*0598	*0729
66	44	2358	2491	2624	2757	2890	3023	3156	3289	3422	3556	3689	3822	3955
67	45	5760	5895	6030	6165	6300	6435	6570	6705	6840	6976	7111	7246	7381
68	46	9362	9499	9636	9773	9910	*0047	*0184	*0321	*0458	*0596	*0733	*0870	*1007
69	48	3164	3303	3442	3581	3720	3859	3998	4137	4276	4416	4555	4694	4833
70	49	7166	7307	7448	7589	7730	7871	8012	8153	8294	8436	8577	8718	8859
71	51	1368	1511	1654	1797	1940	2083	2226	2369	2512	2656	2799	2942	3085
72	52	5770	5915	6060	6205	6350	6495	6640	6785	6930	7076	7221	7366	7511
73	54	0372	0519	0666	0813	0960	1107	1254	1401	1548	1696	1843	1990	2137
74	55	5174	5323	5472	5621	5770	5919	6068	6217	6366	6516	6665	6814	6963
75	57	0176	0327	0478	0629	0780	0931	1082	1233	1384	1536	1687	1838	1989
76	58	5378	5531	5684	5837	5990	6143	6296	6449	6602	6756	6909	7062	7215
77	60	0780	0935	1090	1245	1400	1555	1710	1865	2020	2176	2331	2486	2641
78	61	6382	6539	6696	6853	7010	7167	7324	7481	7638	7796	7953	8110	8267
79	63	2184	2343	2502	2661	2820	2979	3138	3297	3456	3616	3775	3934	4093
80	64	8186	8347	8508	8669	8830	8991	9152	9313	9474	9636	9797	9958	*0119
81	66	4388	4551	4714	4877	5040	5203	5366	5529	5692	5856	6019	6182	6345
82	68	0790	0955	1120	1285	1450	1615	1780	1945	2110	2276	2441	2606	2771
83	69	7392	7559	7726	7893	8060	8227	8394	8561	8728	8896	9063	9230	9397
84	71	4194	4363	4532	4701	4870	5039	5208	5377	5546	5716	5885	6054	6223
85	73	1196	1367	1538	1709	1880	2051	2222	2393	2564	2736	2907	3078	3249
86	74	8398	8571	8744	8917	9090	9263	9436	9609	9782	9956	*0129	*0302	*0475
87	76	5800	5975	6150	6325	6500	6675	6830	7025	7200	7376	7551	7726	7901
88	78	3402	3579	3756	3933	4110	4287	4464	4641	4818	4996	5173	5350	5527
89	80	1204	1383	1562	1741	1920	2099	2278	2457	2636	2816	2995	3174	3353
90	81	9206	9387	9568	9749	9930	*0111	*0292	*0473	*0654	*0836	*1017	*1198	*1379
91	83	7408	7591	7774	7457	8140	8323	8506	8689	8872	9056	9239	9422	9605
92	85	5810	5995	6180	6365	6550	6735	6920	7105	7290	7476	7661	7846	8031
93	87	4412	4599	4786	4973	5160	5347	5534	5721	5908	6096	6283	6470	6657
94	89	3214	3403	3592	3781	3970	4159	4348	4537	4726	4916	5105	5294	5483
95	91	2216	2407	2596	2789	2980	3171	3362	3553	3744	3936	4127	4318	4309
96	93	1418	1611	1804	1997	2190	2383	2576	2769	2962	3156	3349	3542	3735
97	95	0820	1015	1210	1405	1600	1795	1990	2185	2380	2576	2771	2966	3161
98	97	0422	0619	0816	1013	1210	1407	1604	1801	1998	2196	2393	2590	2787
99	99	0224	0423	0627	0821	1020	1219	1418	1617	1816	2016	2215	2414	2613
		01	04	09	16	25	36	49	64	81	00	21	44	69
		51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63

		64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
		96	25	56	89	24	61	00	41	84	29	76	25
51	26	6668	6772	6875	6978	7082	7185	7289	7392	7495	7599	7702	7806
52	27	7096	7202	7307	7412	7518	7623	7729	7834	7939	8045	8150	8256
53	28	7724	7832	7939	8046	8154	8261	8369	8476	8583	8691	8798	8906
54	29	8552	8662	8771	8880	8990	9099	9209	9318	9427	9537	9646	9756
55	30	9580	9692	9803	9914	*0026	*0137	*0249	*0360	*0471	*0583	*0694	*0806
56	32	0808	0922	1035	1148	1262	1375	1489	1602	1715	1829	1942	2056
57	[illegible]	2236	2352	2467	25[illegible]	2[illegible]98	2813	292[illegible]	3044	3159	3275	3390	3506
58	34	3864	3982	4099	4216	4334	4451	4569	4686	4803	4921	5038	5156
59	35	5692	5812	5931	6050	6170	6289	6409	6528	6647	6767	6886	7006
60	36	7720	7842	7963	8084	8206	8327	8449	8570	8691	8813	8934	9056
61	37	9948	*0072	*0195	*0318	*0442	*0565	*0689	*0812	*0935	*1059	*1182	*1306
62	39	2376	2502	2637	2752	2878	3003	3129	3254	3379	3505	3630	3756
63	40	5004	5132	5259	5386	5514	5641	5769	5896	6023	6151	6278	6406
64	41	7832	7962	8091	8220	8350	8479	8609	8738	8867	8997	9126	9256
65	43	0860	0992	1123	1254	1[illegible]8[illegible]	1517	[illegible]9	1780	1911	2043	2174	2306
66	44	4088	4222	4355	4488	4622	4755	4889	5022	5155	5289	5422	5556
67	45	7516	7652	7787	7922	8058	8193	8329	8464	8599	8735	8870	9006
68	47	1144	1282	1419	1556	1694	1831	1969	2106	2243	2381	2518	2656
69	48	4972	5112	5251	5390	5530	5669	5809	5948	6087	6227	6366	6506
70	49	9000	9142	9283	9424	9566	9707	9849	9990	*0131	*0273	*0414	*0556
71	51	3228	3372	3515	3658	3802	3945	4089	4232	4375	4519	4662	4806
72	52	7656	7802	7947	8092	8238	8383	8529	8674	8819	8965	9110	9256
73	54	2284	2432	2579	2726	2874	3021	3169	3316	3463	3611	3758	3906
74	55	7112	7262	7411	7560	7710	7859	8009	8158	8307	8457	8606	8756
75	57	2140	2292	2443	2594	2746	2897	3049	3200	3351	3503	3654	3806
76	58	7368	7522	7675	7828	7982	8135	8289	8442	8595	8749	8902	9056
77	60	2796	2952	3107	3262	3418	3573	3729	3884	4039	4195	4350	4506
78	61	8424	8582	8739	8896	9054	9211	9369	9526	9683	9841	9998	*0156
79	63	4252	4412	4571	4730	4890	5049	5209	5368	5527	5687	5846	6006
80	65	0280	0442	0603	0764	0926	1087	1249	1410	1571	1733	1894	2056
81	66	6508	6672	6835	6998	7162	7325	7489	7652	7815	7979	8142	8306
82	68	2936	3102	3267	3432	3598	3763	3929	4094	4259	4425	4590	4756
83	69	9564	9732	9899	*0066	*0234	*0401	*0569	*0736	*0903	*1071	*1238	*1406
84	71	6392	6562	6731	6900	7070	7239	7409	7578	7747	7917	8086	8256
85	73	3420	3592	3763	3934	4106	4277	4449	4620	4791	4963	5134	5306
86	75	0648	0822	0995	1168	1342	1515	1689	1862	2035	2209	2382	2556
87	76	8076	8252	8427	8602	8778	8953	9129	9304	9479	9655	9830	*0006
88	78	5704	5882	6059	6236	6414	6591	6769	6946	7123	7301	7478	7656
89	80	3532	3712	3891	4070	4250	4429	4609	4788	4967	5147	5326	5506
90	82	1560	1742	1923	2104	2286	2467	2649	2830	3011	3193	3374	3556
91	83	9788	9972	*0155	*0338	*0522	*0705	*0889	*1072	*1255	*1439	*1622	*1806
92	85	8216	8402	8587	8772	8958	9143	9329	9514	9699	9885	*0070	*0256
93	87	6844	7032	7219	7406	7594	7781	7969	8156	8343	8531	8718	8906
94	89	5672	5862	6051	6240	6430	6619	6809	6998	7187	7377	7566	7756
95	91	4700	4892	5083	5274	5466	5657	5849	6040	6231	6423	6614	6806
96	93	3928	4122	4315	4508	4702	4895	5089	5282	5475	5669	5862	6056
97	95	3356	3552	3747	3942	4138	4333	4529	4724	4919	5115	5310	5506
98	97	2984	3182	3379	3576	3774	3971	4169	4366	4563	4761	4958	5156
99	99	2812	3012	3211	3410	3610	3809	4009	4208	4407	4607	4806	5006
		96	25	56	89	24	61	00	41	84	29	76	25
		64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75

		76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87
		76	29	84	41	00	61	24	89	56	25	96	69
51	26	7909	8013	8116	8220	8324	8427	8531	8634	8738	8842	8945	9049
52	27	8361	8467	8572	8678	8784	8889	8995	9100	9206	9312	9417	9523
53	28	9013	9121	9228	9336	9444	9551	9659	9766	9874	9982	*0089	*0197
54	29	9865	9975	*0084	*0194	*0304	*0413	*0523	*0632	*0742	*0852	*0961	*1071
55	31	0917	1029	1140	1252	1364	1475	1587	1698	1810	1922	2033	2145
56	32	2169	2283	2396	2510	2624	2737	2851	2964	3078	3192	3305	3419
57	33	3621	3737	3852	3968	4084	4199	4315	4430	4546	4662	4777	4893
58	34	5273	5391	5508	5626	5744	5861	5979	6096	6214	6332	6449	6567
59	35	7125	7245	7364	7484	7604	7723	7843	7962	8082	8202	8321	8441
60	36	9177	9299	9420	9542	9664	9785	9907	*0028	*0150	*0272	*0393	*0515
61	38	1429	1553	1676	1800	1924	2047	2171	2294	2418	2542	2665	2789
62	39	3881	4007	4132	4258	4384	4509	4635	4760	4886	5012	5137	5263
63	40	6533	6661	6788	6916	7044	7171	7299	7426	7554	7682	7809	7937
64	41	9385	9515	9644	9774	9904	*0033	*0163	*0292	*0422	*0552	*0681	*0811
65	43	2437	2569	2700	2832	2964	3095	3227	3358	3490	3622	3753	3885
66	44	5689	5823	5956	6090	6224	6357	6491	6624	6758	6892	7025	7159
67	45	9141	9277	9412	9548	9684	9819	9955	*0090	*0226	*0362	*0497	*0633
68	47	2793	2931	3068	3206	3344	3481	3619	3756	3894	4032	4169	4307
69	48	6645	6785	6924	7064	7209	7343	7483	7622	7762	7902	8041	8181
70	50	0697	0839	0980	1122	1264	1405	1547	1688	1830	1972	2113	2255
71	51	4949	5093	5236	5380	5524	5667	5811	5954	6098	6242	6385	6529
72	52	9401	9547	9692	9838	9984	*0129	*0275	*0420	*0566	*0712	*0857	*1003
73	54	4053	4201	4348	4496	4644	4791	4939	5086	5234	5382	5529	5677
74	55	8905	9055	9204	9354	9504	9653	9803	9952	*0102	*0252	*0401	*0551
75	57	3957	4109	4260	4412	4564	4715	4867	5018	5170	5322	5473	5625
76	58	9209	9363	9516	9670	9824	9977	*0131	*0284	*0438	*0592	*0745	*0899
77	60	4661	4817	4972	5128	5284	5439	5595	5750	5906	6062	6217	6373
78	62	0313	0471	0628	0786	0944	1101	1259	1416	1574	1732	1889	2047
79	63	6165	6325	6484	6644	6804	6963	7123	7282	7442	7602	7761	7921
80	65	2217	2379	2540	2702	2864	3025	3187	3348	3510	3672	3833	3995
81	66	8469	8633	8796	8960	9124	9287	9451	9614	9778	9942	*0105	*0269
82	68	4921	5087	5252	5418	5584	5749	5915	6080	6246	6412	6577	6743
83	70	1573	1741	1908	2076	2244	2411	2579	2746	2914	3082	3249	3417
84	71	8425	8595	8764	8934	9104	9273	9443	9612	9782	9952	*0121	*0291
85	73	5477	5649	5820	5992	6164	6335	6507	6678	6850	7022	7193	7365
86	75	2729	2903	3076	3250	3424	3597	3771	3944	4118	4292	4465	4639
87	77	0181	0357	0532	0708	0884	1059	1235	1410	1586	1762	1937	2113
88	78	7833	8011	8188	8366	8544	8721	8899	9076	9254	9432	9609	9787
89	80	5685	5865	6044	6224	6404	6583	6763	6942	7122	7302	7481	7661
90	82	3737	3919	4100	4282	4464	4645	4827	5008	5190	5372	5553	5735
91	84	1989	2173	2356	2540	2724	2907	3091	3274	3458	3642	3825	4009
92	86	0441	0627	0812	0998	1184	1369	1555	1740	1926	2112	2297	2483
93	87	9093	9281	9468	9656	9844	*0031	*0219	*0406	*0594	*0782	*0969	*1157
94	89	7945	8135	8324	8514	8704	8893	9083	9272	9462	9652	9841	*0031
95	91	6997	7189	7380	7572	7764	7955	8147	8358	8530	8722	8913	9105
96	93	6249	6443	6636	6830	7024	7217	7411	7604	7798	7992	8185	8379
97	95	5701	5897	6092	6288	6484	6679	6875	7070	7266	7462	7657	7853
98	97	5353	5551	5748	5946	6144	6341	6539	6736	6934	7132	7329	7527
99	99	5205	5405	5604	5804	6004	6203	6403	6602	6802	7002	7201	7401
		76	29	84	41	00	61	24	89	56	25	96	69
		76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87

		88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
		44	21	00	81	64	49	36	25	16	09	04	01
51	26	9153	9257	9361	9464	9568	9672	9776	9880	9984	*0088	*0192	*0296
52	27	9629	9735	9841	9946	*0052	*0158	*0264	*0370	*0476	*0582	*0688	*0794
53	29	0305	0413	0521	0628	0736	0844	0952	1060	1168	1276	1384	1492
54	30	1181	1291	1401	1510	1620	1730	1840	1950	2060	2170	2280	2390
55	31	2257	2369	2481	2592	2704	2816	2928	3040	3152	3264	3376	3488
56	32	3533	3647	3761	3874	3988	4102	4216	4330	4444	4558	4672	4786
57	33	5009	5125	5241	5356	5472	5588	5704	5820	5936	6052	6168	6284
58	34	6685	6803	6921	7038	7156	7274	7392	7510	7628	7746	7864	7982
59	35	8561	8681	8801	8920	9040	9160	9280	9400	9520	9640	9760	9880
60	37	0637	0759	0881	1002	1124	1246	1368	1490	1612	1734	1856	1978
61	38	2913	3037	3161	3284	3408	3532	3656	3780	3904	4028	4152	4276
62	39	5389	5515	5641	5766	5892	6018	6144	6270	6396	6522	6648	6774
63	40	8065	8193	8321	8448	8576	8704	8832	8960	9088	9216	9344	9472
64	42	0941	1071	1201	1330	1460	1590	1720	1850	1980	2110	2240	2370
65	43	4017	4149	4281	4412	4544	4676	4808	4940	5072	5204	5336	5468
66	44	7293	7427	7561	7694	7828	7962	8096	8230	8364	8498	8632	8766
67	46	0769	0905	1041	1176	1312	1448	1584	1720	1856	1992	2128	2264
68	47	4445	4583	4721	4858	4996	5134	5272	5410	5548	5686	5824	5962
69	48	8321	8461	8601	8740	8880	9020	9160	9300	9440	9580	9720	9860
70	50	2397	2539	2681	2822	2964	3106	3248	3390	3532	3674	3816	3958
71	51	6673	6817	6961	7104	7248	7392	7536	7680	7824	7968	8112	8256
72	53	1149	1295	1441	1586	1732	1878	2024	2170	2316	2462	2608	2754
73	54	5825	5973	6121	6268	6416	6564	6712	6860	7008	7156	7304	7452
74	56	0701	0851	1001	1150	1300	1450	1600	1750	1900	2050	2200	2350
75	57	5777	5929	6081	6232	6384	6536	6688	6840	6992	7144	7296	7448
76	59	1053	1207	1361	1514	1668	1822	1976	2130	2284	2438	2592	2746
77	60	6529	6685	6841	6996	7152	7308	7464	7620	7776	7932	8088	8244
78	62	2205	2363	2521	2678	2836	2994	3152	3310	3468	3626	3784	3942
79	63	8081	8241	8401	8560	8720	8880	9040	9200	9360	9520	9680	9840
80	65	4157	4319	4481	4642	4804	4966	5128	5290	5452	5614	5776	5938
81	67	0433	0597	0761	0924	1088	1252	1416	1580	1744	1908	2072	2236
82	68	6909	7075	7241	7406	7572	7738	7904	8070	8236	8402	8568	8734
83	70	3585	3753	3921	4088	4256	4424	4592	4760	4928	5096	5264	5432
84	72	0461	0631	0801	0970	1140	1310	1480	1650	1820	1990	2160	2330
85	73	7537	7709	7881	8052	8224	8396	8568	8740	8912	9084	9256	9428
86	75	4813	4987	5161	5334	5508	5682	5856	6030	6204	6378	6552	6726
87	77	2289	2465	2641	2816	2992	3168	3344	3520	3696	3872	4048	4224
88	78	9965	*0143	*0321	*0498	*0676	*0854	*1032	*1210	*1388	*1566	*1744	*1922
89	80	7841	8021	8201	8380	8560	8740	8920	9100	9280	9460	9640	9820
90	82	5917	6099	6281	6462	6644	6826	7008	7190	7372	7554	7736	7918
91	84	4193	4377	4561	4744	4928	5112	5296	5480	5664	5848	6032	6216
92	86	2669	2855	3041	3226	3412	3598	3784	3970	4156	4342	4528	4714
93	88	1345	1533	1721	1908	2096	2284	2472	2660	2848	3036	3224	3412
94	90	0221	0411	0601	0790	0980	1170	1360	1550	1740	1930	2120	2310
95	91	9297	9489	9681	9872	*0064	*0256	*0448	*0640	*0832	*1024	*1216	*1408
96	93	8573	8767	8961	9154	9348	9542	9736	9930	*0124	*0318	*0512	*0706
97	95	8049	8245	8441	8636	8832	9028	9224	9420	9616	9812	*0008	*0204
98	97	7725	7923	8121	8318	8516	8714	8912	9110	9308	9506	9704	9902
99	99	7601	7801	8001	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800
		44	21	00	81	64	49	36	25	16	09	04	01
		88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Типографія М. Г. Волчанинова, бывшая М. Н. Лаврова и Ко, Леонтьевскій пер., д. Лаврова.

Опечатки и дополненія.

Стр.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
6	11 снизу	остальные два	остальные три
20	12 сверху	На 211-ой	На 311-ой
33	8 снизу	+ 4290	4240

Въ приложеніяхъ, въ таблицѣ дѣлителей, при числахъ 6269, 6091, 7703 и 9343 должны стоять дуги, такъ какъ это числа простыя.

Въ таблицѣ квадратовъ ошибокъ не замѣчено.

Способы повѣрки таблицы квадратовъ.

Кромѣ указанныхъ въ § 18, были приложены слѣдующіе способы повѣрки:

1. Послѣднія двѣ цифры каждаго столбца на первыхъ 8 страницахъ тожественны съ послѣдними цифрами соотвѣтственнаго столбца 2-ой половины таблицы.

Напр., столбецъ 19, какъ на II, такъ на X-ой стран. имѣетъ окончанія 41, 79, 17 и т. д.

2. Если возьмемъ столбецъ, обозначенный какимъ-нибудь числомъ (напр., 34 на III-ьей стран.) и столбецъ, обозначенный числомъ дополнительнымъ до 100 (слѣд. въ нашемъ примѣрѣ 66 на VI или XIV страницахъ) то найдемъ одни и тѣ же окончанія идущими въ одномъ случаѣ сверху страницы внизъ, въ другомъ снизу страницы вверхъ.

3. Въ первой половинѣ таблицы были поставлены черточки тамъ, гдѣ первыя двѣ цифры увеличиваются на 1-цу; во второй половинѣ тамъ, гдѣ онѣ возрастаютъ на 2 единицы. Черточки всюду совпали.

Напр.. на страницахъ I-ой и IX-ой

18	3	2400	2436	2472	2508	2544	2580	2616
68	46	2400	2536	2672	2808	2944	3080	3216

4. Если сравнить третьи цифры справа въ какомъ-нибудь столбцѣ 1-ой половины и соотвѣтственномъ столбцѣ второй половины, то увидимъ, что между ними постоянная разность.

Напр., третьи цифры столбца 69 на YI стран. могутъ быть получены изъ третьихъ цифръ такого же столбца на XIY стран. прибавленіемъ 1-цы.

5. Таблица наша была свѣрена съ таблицами Бернулли, Lais'a и Лиговскаго (Taschenbuch der Mathematik. 1867). Въ первыхъ двухъ найдены десятки ошибокъ, въ послѣдней только одна: квадратъ 226 данъ такой 51067.

При этомъ нужно, впрочемъ, принять во вниманіе, что таблица Лиговскаго въ 10 разъ меньше нашей.

Приложеніе таблицы квадратовъ къ полученію членовъ ариѳметической прогрессіи.

Пусть требуется къ 3827 послѣдовательно прибавлять много разъ по 74. Ищемъ въ столбцѣ 37 окончаніе 27. Находимъ, что послѣ 27 идутъ окончанія 01, 75 и т. д.

Выписываемъ ихъ

3827
01
75
49

Затѣмъ предъ ними или сносимъ число изъ предъидущей строки безъ измѣненія (если стоящее направо окончаніе возрастаетъ), или увеличивая на 1-цу, если это окончаніе убываетъ.